

## Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Perelman, Ch.: Les paradoxes de la logique. *Mind* 45, 204—208 (1936).

Barzin, Marcel: Sur la crise contemporaine des mathématiques. *Enseignement Math.* 34, 5—11 (1935).

Fraenkel, A.: Sur la notion d'existence dans les mathématiques. *Enseignement Math.* 34, 18—32 (1935).

Hertz, Paul: Sur la nature de la logique, de ses catégories et de ses vérités. *Enseignement Math.* 34, 95—97 (1935).

Chevalley, C.: Sur la pensée de J. Herbrand. *Enseignement Math.* 34, 97—102 (1935).

Errera, A.: Sur la crise contemporaine des mathématiques. *Enseignement Math.* 34, 12—17 (1935).

Errera, A.: Réponse à quelques objections. *Enseignement Math.* 34, 103—111 (1935).

Exposition détaillée des idées de l'auteur sur la logique intuitionniste (voir ce *Zbl.* 8, 290). *A. Heyting* (Enschede).

Errera, A.: Sur le principe du tiers exclu. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) *Mathematica, Cluj* 9, 73—79 (1935).

● Scholz, Heinrich, und Hermann Schweitzer: Die sogenannten Definitionen durch Abstraktion. Eine Theorie der Definitionen durch Bildung von Gleichheitsverwandtschaften. (Forsch. z. Logistik u. z. Grundlegung d. exakt. Wiss. Hrsg. v. Heinrich Scholz. H. 3.) Leipzig: Felix Meiner 1935. V, 108 S. RM. 4.50.

Das I. von Scholz verfaßte Hauptstück bringt eine Übersicht über die bisher bekannten Arten der Definition durch Abstraktion, deren Unterschiede scharf herausgearbeitet werden und die einer kritischen Würdigung unterzogen werden. Vor allem werden drei hergehörige Definitionsarten von Cantor, Freges abstraktive Zahldefinition, Russells principle of abstraction und Peanos Definition durch Abstraktion betrachtet, wobei vom Standpunkt der modernen Logistik den Frege-Russellschen Methoden der Vorzug gegeben wird. An diese schließen auch das II. und III. Hauptstück, die wie der Anhang von Schweitzer verfaßt sind, inhaltlich an. Im II. Hauptstück werden die „zweistellige Gleichheit“ (transitive und symmetrische Relation) und die zugehörige „Gleichheitsverwandtschaft“ (Klasse von all solchen Dingen, von denen je zwei in Gleichheitsverwandtschaft stehen) logistisch pünktlich definiert, fundamentale Eigenschaften der Gleichheitsverwandtschaft werden in aller Ausführlichkeit kalkalmäßig dargestellt, wobei eine Reihe logistisch wichtiger Unterscheidungen (wie die zwischen Gleichheit und Totalgleichheit) berücksichtigt sind, und die Beziehungen der gegebenen Definition zu verwandten werden auseinandergelegt. Das III. Hauptstück ist der Verallgemeinerung auf „ $2n$ -stellige Gleichheiten“ gewidmet. Dieser Verallgemeinerung liegt eine von F. Bachmann herrührende Definition der mehrstelligen Gleichheitsverwandtschaft als einer Relation — durch die die Heranziehung von Klassenklassen vermieden wird — zugrunde. Das Definitionsverfahren wird an vielen, meist geometrischen Begriffsbildungen (wie dem Eudoxischen Streckenverhältnis) exemplifiziert. — Ein Anhang behandelt die Beziehung der Definition der Gleichheitsverwandtschaften zu Freges Einführung der Wertverlaufsnamen in seine Logik.

*Arnold Schmidt* (Marburg, Lahn).

Ackermann, Wilhelm: Beiträge zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik. *Math. Ann.* 112, 419—432 (1936).

Beim Entscheidungsproblem der I. Stufe kann man sich bekanntlich auf Formeln beschränken, in denen alle All- und Seinszeichen als „Präfix“ dem übrigen Formelteil voranstehen. Von Skolem, Gödel und Kalmár wurden gewisse Typen von Präfixen angegeben, auf deren Untersuchung sich das allgemeine Entscheidungsproblem der I. Stufe zurückführen läßt. Im I. Teil der vorliegenden Arbeit gibt

Ackermann einen weiteren einfachen derartigen Typ an: Hinsichtlich der Erfüllbarkeit schlechthin (d. h. in einem beliebigen Bereiche) ist jede Formel 1. Stufe einer Formel mit einem Präfix der Gestalt  $(Ex)(y) (Ez)(u_1) \dots (u_n)$  gleichwertig. Im II. Teil wird für Formeln der Gestalt

$$(x)(Ey) F(x, y) \& (z_1) \dots (z_n) \mathfrak{A}(z_1, \dots, z_n; F) \quad n \leq 4$$

das Erfüllbarkeitsproblem gelöst, wobei auch für die Erfüllbarkeit in einem endlichen Bereich ein (für beliebiges  $n$  gültiges) Kriterium angegeben wird. *Arnold Schmidt.*

**Skolem, Th.: Ein Satz über die Erfüllbarkeit von einigen Zählausdrücken der Form  $(x)(Ey_1, \dots, y_n) K_1(x, y_1, \dots, y_n) \& (x_1, x_2, x_3) K_2(x_1, x_2, x_3)$ .** Avh. Norske Vid. Akad. Oslo 1936, 1—10 (Nr 8).

Dies ist eine weitere Ausdehnung eines früheren Ergebnisses des Verf. (dies. Zbl. 12, 385), nämlich auf Ausdrücke der im Titel genannten Art, wo  $K_2$  eine Konjunktion von  $m^3$  Aussagen  $A_{ijh}$  ( $i, j, h = 1, 2, \dots, m$ ) der Form

$$(R_{ij}(x_1, x_2) \leftrightarrow R_{ji}(x_2, x_1)) \& (R_{ih}(x_1, x_2) \& R_{hj}(x_2, x_3) \rightarrow R_{ij}(x_1, x_3))$$

ist. Hier sind die  $R_{ij}$  gewisse Relationen, die auch in  $K_1$  (neben noch anderen) erscheinen mögen. Nach einer kleinen Verallgemeinerung der früheren Methode wird hier bewiesen: Wenn ein solcher Ausdruck erfüllbar ist, so gibt es eine endliche Menge von Tabellen mit derselben Kompatibilitätseigenschaft wie früher; und wenn es umgekehrt eine solche Tabellenmenge gibt, so ist der Ausdruck erfüllbar, und zwar in einem endlichen Bereich. Zum Schluß wird hervorgehoben, daß nach einer anderen Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 12, 385) die Erfüllbarkeitsfrage für einen beliebig gegebenen Zählausdruck zurückgeführt werden kann auf die gleiche Frage für einen Ausdruck  $Z_1 \& Z_2 \& Z_3 \& Z_4$ , wo  $Z_1$  und  $Z_2$  dieselben wie hier sind (mit der weiteren Bedingung, daß die anderen in  $K_1$  erscheinenden Prädikate einstellig sind), und  $Z_3$  und  $Z_4$  nur die  $R_{ij}$  enthalten und Präfixe der Form  $(x_1, x_2)(Ey_1, \dots, y_m)$  bzw.  $(x_1, x_2)$  haben.

*H. B. Curry (State College, Pa.).*

**Pankajam, S.: On the arithmetico-logical principle of duality.** J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 269—275 (1935).

This paper concerns a system consisting of a Boolean algebra  $\mathfrak{A}$  with a numerical measure function  $m(A)$  subject to the postulate:

$$m(A) + m(B) = m(A \oplus B) + m(A \otimes B) \quad (1)$$

where  $\oplus$  and  $\otimes$  are the operations of  $\mathfrak{A}$ , and  $+$  is ordinary numerical addition. (The author does not use the term measure nor the notation  $m(A)$ , but she allows expressions to stand ambiguously either for elements of  $\mathfrak{A}$  or for what are here called their measures; she interprets the elements of  $\mathfrak{A}$  as finite classes, and their measures as cardinal numbers, but seems to have in mind other applications.) The principal theorem is as follows: let  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_n$  be numbers and  $f_1, \dots, f_m, g_1, \dots, g_n$  expressions in  $\mathfrak{A}$  formed from  $A, B, C, \dots, K$  by  $\oplus$  and  $\otimes$  alone; then if the equation

$$\lambda_1 m(f_1) + \lambda_2 m(f_2) + \dots + \lambda_m m(f_m) = \mu_1 m(g_1) + \mu_2 m(g_2) + \dots + \mu_n m(g_n) \quad (2)$$

is identically true for all  $A, B, C, \dots, K$  in  $\mathfrak{A}$ , it remains identically true if  $\oplus$  and  $\otimes$  are interchanged. Since the formulation given by the author for  $\mathfrak{A}$  and the above postulate for  $m$  are self dual, the theorem is obvious; but the author prefers another proof which gives a method of transforming the identity (2) into its dual. This proof depends only on a) the process of taking the negative of expressions such as  $f_1, f_2, \dots$ , b)  $m(U) = N \neq 0$  where  $U$  is the universal element in  $\mathfrak{A}$ , and c)  $m(\bar{A}) = N - m(A)$ . (These are not deducible from the preceding formulation, but are consistent with the interpretation mentioned.) The author also proves a theorem of duality in  $\mathfrak{A}$  by practically the same method as is given, e.g., in Hilbert and Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, Kap. 1, § 5. *H. B. Curry (State College, Pa.).*

**Quine, W. V.: Concepts of negative degree.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 40—45 (1936).

In an unpublished paper the author has proposed a calculus of concepts, which term is to be understood as including propositions, classes, and  $m$ -adic relations for an arbitrary integral  $m \geq 2$ . The degree of such a concept is defined thus: a proposition is of degree 0, a class of degree 1, and an  $m$ -adic relation of degree  $m$ . A concept is said to be of type 1 when it is a proposition or a class or relation of individuals. The authors calculus, it is stated, embraces all concepts of type 1 as elements; on the other hand, like the simple propositional calculus, it does not depend on the use of bound variables, and the elements are considered abstractly, without regard to their meaning as concepts. In the present paper the author considers the effect of adjoining to this calculus concepts of negative degree as fictitious entities. By this means certain simplifications are introduced which are vaguely analogous to those following on the introduction of imaginaries into analysis; but it is shown that certain of the properties of natural concepts cannot be extended to the fictitious concepts without introducing undesirable consequences.

*H. B. Curry* (State College, Pa.).

**MacNeille, H. M.: Extensions of partially ordered sets.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 45—50 (1936).

By a partially ordered set the author means a system with a single transitive symmetric relation  $\subset$ . In terms of this the author defines the relations  $\supset$  and  $=$ , products, sums, units, complements, a notion of distribution applied to products and sums, and some subsidiary notions. He then states several postulates with respect to which partially ordered sets can be classified; these include, e. g., the distributive law in a form whose equivalence to the ordinary one is asserted, but is not obvious. The principal part of the paper is concerned with extension of p. o. sets; i. e. the embedding of a p. o. set  $K$  in a set  $L$  of more specialized character. The following types of extension are considered: 1) the adjunction of units, which is trivial; 2) the extension of a system with units to one in which products and sums of arbitrary subsets exist, — this is accomplished by a generalization of the Dedekind cut method; 3) the extension of a system with products to one in which products are distributive in the authors sense; and 4) the extension of a system with distributive sums and products to a Boolean Algebra. The paper is a summary of dissertation which the author expects to publish later; no proofs of any consequence are given. For the author's abstract see Bull. Amer. Math. Soc. 41, 193 (1935).

*H. B. Curry* (State College, Pa.).

**Webb, Donald L.: Definition of Post's generalized negative and maximum in terms of one binary operation.** Amer. J. Math. 58, 193—194 (1936).

In a previous paper (this Zbl. 12, 1) the author has shown that any truth function over an  $m$ -valued truth table can be defined in terms of a single binary function which he denotes by  $p/q$ . On the other hand E. L. Post has shown (Amer. J. Math. 1921) that any such function could be defined in terms of two primitive ones,  $\infty_m p$  and  $p v_m q$ . In the present paper the authors give an explicit determination of  $\infty_m p$  and  $p v_m q$  in terms of a redefined  $p/q$ , thus giving a new proof of the definability of all  $m$ -valued truth functions in terms of one primitive one.

*H. B. Curry*.

**Klein, Fritz: Über ausgeglichene Verbände.** Math. Ann. 112, 411—418 (1936).

In einer gewissen Klasse von Verbänden (s. dies. Zbl. 12, 145/146) wird eine stellensymmetrische und transitive „Maßfunktion“  $[a, b]$  eingeführt, zunächst für zwei voneinander abhängige Elemente  $a, b$  ( $a = a \times b$ ), sodann mit Hilfe einer als „Brückensatz“ bezeichneten Beziehung für beliebige Elemente  $a, b$ .

*Arnold Schmidt*.

**Sommerfeld, A.: Wege zur physikalischen Erkenntnis.** Scientia 59, 181—187 (1936).

**Mariani, Jean: La signification philosophique de la théorie des quanta.** Thalès. Rec. Ann. Trav. Inst. Hist. Sci. et Techn., Univ. Paris 1, 85—93 (1935).

**Zilsel, Edgar: P. Jordans Versuch, den Vitalismus quantenmechanisch zu retten.** Erkenntnis 5, 56—64 u. 178—184 (1935).

## Algebra und Zahlentheorie.

**Szökefalvi Nagy, Gyula:** Über die reellen Nullstellen des Derivierten eines Polynoms mit reellen Koeffizienten. Mat. természett. Értes. 53, 781—791 u. deutsch. Zusammenfassung 792 (1935) [Ungarisch].

Let  $\alpha$  and  $\beta$  be two zeros of the real polynomial  $P(x)$  of the  $n$ -th degree such that

$$|\Im \alpha| \quad \text{and} \quad |\Im \beta| \leq 1/n(b-a); \quad a = \Re \alpha, \quad b = \Re \beta.$$

Supposed that no zeros of  $P(x)$  lie in the circle with the diameter  $a, b$ , the derivative  $P'(x)$  vanishes at least once in the real interval  $a + 1/n(b-a); b - 1/n(b-a)$ .

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

**Tietze, Heinrich:** Über eine der Fourierschen Regel verwandte Zeichenregel für die Anzahl der Nullstellen in einem offenen Intervall. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1935, 485—491 (H. 3).

Verf. stellt sich den Zweck, die von A. Hurwitz [Math. Ann. 71, 584—591 (1911); Werke 2, 577—585] auf analytische Funktionen in einem halboffenen Intervall erweiterte Budan-Fouriersche Regel auf offene Intervalle zu erweitern. Ist  $c_0, c_1, c_2, \dots$  eine reelle Zahlenfolge, so modifiziert der Verf. sie auf zweierlei Art, indem er die ev. vorkommenden aus lauter Nullen bestehenden Teilfolgen  $c_{h-m}, \dots, c_{h-1}$  ( $c_h \neq 0$ ) durch  $c_h, c_h, \dots, c_h$  bzw. durch  $(-1)^m c_h, (-1)^{m-1} c_h, \dots, -c_h$  ersetzt. Werden die Anzahlen der (als endlich vorausgesetzten) Zeichenwechsel dieser beiden Folgen mit  $W$  bzw.  $W^*$  bezeichnet, so beweist der Verf.: Ist  $N_{a,b}^*$  die Anzahl der Nullstellen einer in  $a \leq x \leq b$  analytischen Funktion  $f(x)$  innerhalb  $a < x < b$  und bedeuten  $W_a, W_a^*$  die soeben erläuterten Anzahlen für die Folge  $f(a), f'(a), f''(a), \dots$ , so ist  $N_{a,b}^* \leq W_a - W_b^*$  und  $N_{a,b}^* \equiv W_a - W_b^* \pmod{2}$ .

N. Tschebotaröw (Kasan).

**Lettenmeyer, Fritz:** Über Gleichungen unendlich hohen Grades in zwei Variablen. II. S.-B. Bayer. Akad. Wiss. 1935, 457—469 (H. 3).

In einer früheren Arbeit (vgl. dies. Zbl. 8, 2) hat Verf. die Frage nach den formalen Lösungen (1)  $Y = \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_{\nu} x^{\nu/k}$  ( $\nu_0 \geq 0$ ) einer Gleichung  $\sum_{\sigma=0}^{+\infty} \left( \sum_{\varrho=-\infty}^{+\infty} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho} \right) y^{\sigma} = 0$  behandelt. Er betrachtet jetzt allgemeiner Gleichungen

$$\sum_{\sigma=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{\varrho=-\infty}^{+\infty} a_{\varrho\sigma} x^{\varrho} \right) y^{\sigma} = 0, \quad (2)$$

in denen also auch negative Potenzen von  $y$  auftreten, und untersucht sie auf Lösungen der Gestalt (1). Das Einsetzen der negativen Potenzen von  $Y$  in die linke Seite von (2)

ist dabei so zu verstehen:  $Y^{-1}$  ist für  $c_{\nu_0} \neq 0$  die Potenzreihe  $\sum_{\nu=-\nu_0}^{\infty} C_{\nu} x^{\nu/k}$ , die sich durch Ausmultiplizieren aus  $\sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} c_{\nu} x^{\nu/k} \cdot \sum_{\nu=-\nu_0}^{\infty} C_{\nu} x^{\nu/k} = 1$  rekursiv bestimmt,  $Y^{-n}$  ist  $(Y^{-1})^n$ .

Die früheren Resultate lassen sich fast wörtlich auf diesen Fall übertragen. Köthe.

**Pfeiffer, G.:** Sur le déterminant de Wronski. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math. 1, 5—6 u. franz. Zusammenfassung 6 (1935) [Ukrainisch].

**Rados, Gusztáv:** Über induzierte quadratische Formen. Mat. természett. Értes. 53, 685—693 u. deutsch. Zusammenfassung 694—695 (1935) [Ungarisch].

Ist  $M_1 = (a_{gh})_1^{\kappa}$  eine symmetrische Matrix, so ist die Matrix der  $n$ -ten präparierten Substitution  $M_n = (s_{in})_1^{\nu}$ ,  $\nu = \binom{n+\kappa-1}{n}$ , gleichfalls symmetrisch. Sind  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von  $M_1$ , so ergeben sich die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von  $M_n$ , indem man in dem Produkt  $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}$  für  $i_1, \dots, i_n$  alle Kombinationen  $n$ -ter Klasse von  $1, \dots, \kappa$  mit Wiederholungen einsetzt. Hieraus folgen Sätze über den definiten Charakter der zugehörigen induzierten Formen.

Otto Szász (Cambridge, Mass.).

**Rados, Gusztáv:** Über den Rang der Determinante induzierter Substitutionen. Mat. természett. Értes. 53, 696—698 u. deutsch. Zusammenfassung 699—700 (1935) [Ungarisch].

Mit Hilfe der Resultate der vorhergehenden Note wird ein Satz von Kürschak über den Rang der Determinante der  $n$ -ten induzierten Form kurz bewiesen.

Otto Szász (Cambridge, Mass.).

**Oppenheim, A.:** The lower bounds of Hermitian quadratic forms in any quadratic field. Proc. London Math. Soc., II. s. 40, 541—555 (1936).

Real indefinite binary Hermitian quadratic forme  $\Phi$  of non-zero determinant  $\Delta$ , with integral variables in  $K(\sqrt{m})$ , correspond to quaternary quadratic forms, with rational integer variables, of signature zero. The author's theorem (this Zbl. 9, 51 and 52) concerning such quaternaries is applied to obtain as much information as possible concerning the lower bounds  $L$  of forms  $\Phi$ . The theorem applies if  $\mu^2 m \Delta / L^2 = \frac{1}{4} k$  ( $k = \pm 6, \pm 10, \pm 12$ , or  $\pm 25/2$ ), where  $k > 0$  if  $m < 0$ ,  $k \Delta > 0$  if  $m > 0$ ,  $m$  is of certain simple tabulated forms and the coefficients of  $\Phi$  satisfy a certain diophantine equation (whose solution is readily obtained). For any other  $m$  and  $\Phi$ ,  $\mu^2 |m \Delta| L^{-2} > 10$ . The numerous values  $m$  between  $-100$  and  $100$  for which information is afforded are listed. Most interesting are several instances of class-number  $> 1$ , e. g.  $K(\sqrt{10})$ , and one in which the minimum  $L$  is represented only improperly. The cases  $m = -7, -11$  of class-number unity, for which the preceding fails, are solved by a method reducing the problem to one in indefinite ternaries of minimum 1; as a result, in  $K(i\sqrt{7})$ ,  $-\Delta/L^2 = 15/7$  or  $3$ , or  $\geq 23/7$ ,  $\Phi$  being determined in the cases of equality; and similarly for  $K(i\sqrt{11})$ . See also this Zbl. 4, 101.

G. Pall (Montreal).

**Weber, Werner:** Über Modularerweiterung bei Erweiterung des Operatorenbereiches. Deutsche Math. 1, 73—89 (1936).

Der Verf. betrachtet das folgende Problem: Wann läßt sich ein Modul  $m$  mit einem kommutativen Operatorenring  $\Gamma$  zu einem Modul  $\mathfrak{M}$  mit einem gegebenen Oberring  $K$  von  $\Gamma$  als Operatorenring erweitern? Das Problem ist immer lösbar, wenn  $\Gamma$  durch eine endliche Anzahl von Unbestimmten erweitert wird oder, im Falle  $\Gamma$  ein Körper ist, wenn eine endliche algebraische Erweiterung vorgenommen wird. — Die Existenz von  $\mathfrak{M}$ , wenn  $\Gamma$  zu seinem Quotientenkörper erweitert wird, ist an gewisse einfache Eigenschaften der Modulmultiplikation gebunden.

Ore.

**McCoy, Neal H.:** Quasi-commutative rings and differential ideals. Trans. Amer. Math. Soc. 39, 101—116 (1936).

A quasi-commutative ring is a ring  $K[\xi, \eta]$  obtained by ring adjunction to a commutative ring  $K$  having a unit element of two elements  $\xi, \eta$ , each commutative with elements of  $K$  and with  $\zeta = \xi\eta - \eta\xi$ . Each element of a quasi-commutative ring can be represented by a form  $\sum c_{ijk} \xi^i \eta^j \zeta^k$ ,  $c_{ijk} \in K$ . Every quasi-commutative ring  $K[\xi, \eta]$  is homeomorphic with an abstractly defined, most general, quasi-commutative ring  $K[\alpha, \beta]$ . Let  $K[x, y, z]$  be the ring of polynomials in the commutative indeterminates  $x, y, z$ . The correspondence between the element  $\sum c_{ijk} \alpha^i \beta^j \gamma^k$  where  $\gamma = \alpha\beta - \beta\alpha$  and the polynomial  $\sum c_{ijk} x_i y_j z_k$  associates the two-sided ideals of  $K[\alpha, \beta]$  with the differential ideals (that is, ideals which are closed with respect to certain differential operators) of  $K[x, y, z]$  regarded as a differential ring with the operators  $z(\partial/\partial x)$  and  $z(\partial/\partial y)$  as the differential operators. If  $K$  is a ring with a basis theorem, a characterization of the quasi-commutative rings is obtained by a study of the corresponding differential ideals. Quasi-commutative rings  $K[\xi, \eta]$  which are finite algebras over a field  $K$  are considered.

Raudenbush (New Haven).

**Eichler, Martin:** Untersuchungen in der Zahlentheorie der rationalen Quaternionenalgebren. J. reine angew. Math. 174, 129—159 (1936).

Using the methods and notions introduced by Brandt [Math. Ann. 99 (1928)] the author investigates the moduli and orders of a rational generalized quaternion

algebra. Necessary and sufficient conditions that a modulus and the complement  $\bar{o}$  of an order  $o$  be reversible (umkehrbar), an explicit construction of  $\bar{o}$ , and a condition that  $o$  be primitive i. e. contain the maximal order of a quadratic field are developed. If  $o_1 \supset o$  under certain conditions it is shown that  $o$  may be expressed as a sum  $[1, o_1/o]$  where  $o_1/o$  is the left conductor (quotient modulus) of  $o_1$  to  $o$ . These tools are applied to the problem of characterizing the extensions  $o_1$  of  $o$  by inner properties of  $o$ . To obtain the maximal orders containing any  $o$  it is sufficient to solve the same problem for primitive orders. Restriction is therefore made to this case and a step construction is given. If  $o_1$  is a minimal extension of  $o$  then  $\frac{|o|}{|o_1|} = p$  or  $p^2$  ( $|o|$  is the determinant of  $o$  and  $p$ , a prime) and  $o_1$  is called a  $p$ -extension. To characterize these the author introduces for each prime divisor of the discriminant of  $o$  the symbol  $(o/p) = 0, 1, -1$  according as  $\mathfrak{S}_p - \mathfrak{N}_p$  has one of three possible structures where  $\mathfrak{S}_p$  denotes  $o - p o$  and  $\mathfrak{N}_p$  the radical of  $\mathfrak{S}_p$ . The number and nature of the  $p$ -extensions of a primitive  $o$  is determined by the value of  $(o/p)$ . From this there result a condition that an order be the intersection of two maximal orders and an enumeration of the maximal orders containing a primitive order. The latter is related to some work of Fueter (cf. this Zbl. 8, 292). Jacobson (Bryn Mawr).

**Korselt, A.: Vollständige Lösung einer neuen diophantischen Aufgabe.** Math. Ann. 112, 395—410 (1936).

Mordell [Proc. Cambridge Philos. Soc. 21, 179—192 (1922)] has shown that all the rational solutions of the diophantine equation  $f(x, y) = kz^2$ , where  $f$  is an homogeneous quartic of genus unity with integer coefficients, may be expressed rationally in terms of a finite number of solutions. The present paper deals with the special case  $2x^4 + 3y^4 = 5z^2$  and describes an elementary process for obtaining all solutions of this equation. D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

● **Peters, J., A. Lodge, E. J. Ternouth and E. Gifford: Factor table giving the complete decomposition of all numbers less than 100,000.** (Brit. assoc. math. tables. Vol. 5.) London: Office of the Brit. Assoc. 1935. XV, 291 pag. bound 20/-.

This factor table is the first of its kind giving, as it does, the complete decomposition into primes of each of the first 100000 numbers. It is the result of collating three manuscripts prepared independantly and by different methods. There is good reason to believe that it contains no error. The table consists of 282 pages with 350 entries on most pages. The primes are not indicated by dashes, but are printed in bold face, thus assuring the reader that he has entered the table correctly. The table has been compared with several others and lists of errors in these are given in the introduction. Pages 285—291 are devoted to a table of reciprocals of primes  $< 10^4$  to 8 significant figures, with first differences. This table is intended for testing a given number  $< 10^8$  for prime factors. D. H. Lehmer (Bethlehem, Pa.).

**Erdős, Paul: On the integers which are the totient of a product of three primes.** Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 16—19 (1936).

The main result of this paper is that if  $f(n)$  is the number of representations of  $n$  as  $(p-1)(q-1)(r-1)$  where  $p, q, r$  are different primes, then  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$ .

The proof is based on a slightly more precise form of the proposition (established by the author in a previous paper, this Zbl. 12, 149) that for almost all primes  $p \leq n$ ,  $p-1$  has between  $(1-\varepsilon) \log \log n$  and  $(1+\varepsilon) \log \log n$  different prime factors. He is then able to prove that, if  $p', q', r'$  denote primes with  $p'q'r' \leq n$  for which  $p'-1, q'-1, r'-1$  have each more than  $(1-\varepsilon) \log \log n$  different prime factors, then the number of different numbers of the form  $(p'-1)(q'-1)(r'-1)$  is of lower order of magnitude than the number of sets  $p', q', r'$ . This establishes the main result. Correction. The formula between (2) and (3) should read:

$$N(P_k, n) < \frac{Cn}{\log^2 n} \frac{(C + \log \log n)^{k+3}}{(k-1)!} + o\left(\frac{n}{\log^2 n}\right). \quad \text{Davenport.}$$

**Archibald, Ralph G.:** Goldbach's theorem. *Scripta Math.* 3, 44—50 u. 153—161 (1935).

**Chowla, S., and S. S. Pillai:** The number of representations of a number as a sum of  $n$  non-negative  $n$ th powers. *Quart. J. Math., Oxford Ser.* 7, 56—59 (1936).

The authors have improved the method used in a former paper (this Zbl. 12, 339) to obtain the following theorem: For fixed  $n \geq 5$ , there is a positive number  $c$ , depending only on  $n$ , such that  $r_{n,n}(N) > c \log \log N$  for infinitely many  $N$ ; that is,  $r_{n,n}(N) = \Omega(\log \log N)$ . Wright (Aberdeen).

**Pillai, S. S.:** On Waring's problem. *J. Annamalai Univ.* 5, 145—166 (1936).

Let  $[x]$  denote the integral part of  $x$  and let  $\{x\} = x - [x]$ ; also  $l = [(\frac{3}{2})^n]$  and  $j = [(\frac{1}{3})^n]$ . The author proves: (1)  $g(n) = 2^n + l + O(j)$ ; (2) If  $n > n_0$  and

$$\left\{ \left( \frac{3}{2} \right)^n \right\} \leq 1 - \frac{l+3}{2^n},$$

then  $g(n) = 2^n + l - 2$ ; (3) If  $n > n_0$  and  $\{(\frac{3}{2})^n\} \geq 1 - 2^{-n}l$ , then  $g(n) \geq 2^n + l + j - 3$ . The method is based on that of Vinogradoff and on a lemma of Dickson's. — The author states that he has worked out  $n_0$  in Theorem 2 and that by varying the method of proof he has shown the theorem to be true when  $n_0 = 7$ . The condition of Theorem 2 is satisfied for  $4 \leq n \leq 100$  and so, when  $7 \leq n \leq 100$ ,

$$g(n) = 2^n + l - 2.$$

This is a very striking result.

Wright (Aberdeen).

**Chowla, Inder:** Vinogradov's solution of Waring's problem: Hypothesis K of Hardy and Littlewood. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* 2, 562—573 (1935).

Let  $H_{n,n}(x)$  denote the number of positive integers  $\leq x$  not expressible as a sum of  $n$  non-negative  $n$ -th powers. The hypothesis  $P$ , that  $H_{n,n}(x) > x^{1-\varepsilon}$  for  $x > x_0(\varepsilon)$  and every  $\varepsilon > 0$ , is weaker than hypothesis  $K$  of Hardy and Littlewood. It is shown, using methods of Vinogradov (this Zbl. 12, 196), S. Chowla (this Zbl. 12, 339), and Pillai, that if  $P$  holds there exists a  $w = w(n)$  such that every large integer  $\equiv 1 \pmod{w}$  is a sum of  $3n + 2$  non-negative  $n$ -th powers, ( $n > n_0$ ). G. Pall.

**Hua, Loo-Keng:** Waring's problem for cubes. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 26, 139 bis 140 (1935).

Landau's proof (*Math. Ann.* 66, 102) that every large integer is a sum of eight positive cubes employed the form  $x^2 + y^2 + z^2$ . The author presents a similar proof based on the form  $x^2 + 2y^2 + 5z^2$ . (Cf. this. Zbl. 13, 6.) G. Pall (Montreal).

**Lévy, Paul:** Observations sur une note de M. Denjoy. *C. R. Acad. Sci., Paris* 202, 812—813 (1936).

Wie Verf. mit Recht bemerkt, sind einige von den Ergebnissen der beiden Noten von Denjoy über metrische Kettenbruchtheorie (dies. Zbl. 13, 155, 156) in früheren (übrigens von Denjoy erwähnten) Veröffentlichungen von Kuzmin und dem Verf. bereits enthalten; das betrifft vor allem die Verallgemeinerung der Gaußschen Grenzformel auf das Intervall  $(0, t)$  an Stelle von  $(0, 1)$  und die Aufstellung der  $p$ -dimensionalen Grenzverteilung von  $a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+p-1}$  bei  $n \rightarrow \infty$  und festem  $p$ . A. Khintchine.

**Koksma, J. F.:** Approximation von Irrationalzahlen mittels Kettenbrüchen. *Mathematica, Leiden* 2, 212—220; 3, 122—128 (1934) [Holländisch].

**Koksma, J. F.:** Metrisches zur Theorie der Diophantischen Approximationen. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* 39, 225—240 (1936).

Verf. hat in einer anderen Arbeit (dies. Zbl. 12, 14) die Frage behandelt, unter welchen Bedingungen die Folge

$$f(1, \theta), f(2, \theta), f(3, \theta), \dots \quad (1)$$

für fast alle  $\theta$  eines Intervalls gleichverteilt modulo 1 ist und hat dafür sehr allgemeine hinreichende Bedingungen angegeben. In der vorliegenden Arbeit behandelt er in ungefähr derselben Allgemeinheit die Frage, wie scharf sich (für fast alle  $\theta$  eines Intervalls) jede reelle Zahl modulo 1 durch die Glieder der Folge (1) annähern läßt. Von

seinem — sehr allgemeinem — Resultat möge hier nur der folgende — auch noch ziemlich allgemeine — Spezialfall angegeben werden: Es sei  $K > 0$ ,  $\alpha < \beta$ ; für jedes natürliche  $x$  sei  $f(x, \theta)$  eine für  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  stetig differentiierbare reelle Funktion von  $\theta$ ; für jedes Paar von natürlichen Zahlen  $X, x$  mit  $X \neq x$  sei  $f'(X, \theta) - f'(x, \theta)$  monoton und dem absoluten Betrage nach  $\geq K$  für  $\alpha \leq \theta \leq \beta$ . Endlich sei  $\psi(x)$  eine positive Funktion der natürlichen Zahl  $x$ ,  $\psi(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow \infty$ . Dann besitzt für fast alle  $\theta$  mit  $\alpha \leq \theta \leq \beta$  sowohl das Ungleichungssystem  $\gamma < f(x, \theta) - y < \gamma + x^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi(x)$  als auch das Ungleichungssystem  $\gamma - x^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi(x) < f(x, \theta) - y < \gamma$  für jedes reelle  $\gamma$  unendlich viele ganzzahlige Lösungen  $x, y$ . — Die angeführten Bedingungen für  $f(x, \theta)$  sind insbesondere in folgenden Spezialfällen erfüllt: I.  $f(x, \theta) = \theta \cdot \lambda(x)$ ; dabei soll es ein  $k > 0$  geben, so daß für jedes Paar von natürlichen Zahlen  $X \neq x$  die Ungleichung  $|\lambda(X) - \lambda(x)| \geq k$  gilt. II.  $f(x, \theta) = \theta^{M(x)}$ ; dabei soll  $\alpha \geq 1$ ,  $M(x) \geq 1$  sein, und es soll ein  $k > 0$  geben, so daß für jedes Paar von natürlichen Zahlen  $X \neq x$  die Ungleichung  $|M(X) - M(x)| \geq k$  gilt. III.  $f(x, \theta) = \theta^x$ ,  $\alpha \geq 1$  (Spezialfall von II). — Verf. hat schon früher (vgl. dies. Zbl. 5, 349) einen ähnlichen aber schwächeren (mit  $x^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi(x) \cdot \log x$  statt  $x^{-\frac{1}{2}} \cdot \psi(x)$ ) und nicht so allgemeinen Satz bewiesen. Damals stützte er den Beweis auf einen allgemeinen Satz von v. d. Corput, während er jetzt einen hier bequemer zum Ziel führenden (auf einer elementaren Identität aus der Theorie der Fourierreihen beruhenden) Ansatz von Siegel benutzt. *Jarník.*

## Gruppentheorie.

**Whitehead, J. H. C.:** On certain sets of elements in a free group. Proc. London Math. Soc., II. s. 41, 48—56 (1936).

$a_1, a_2, \dots, a_p$  seien die Erzeugenden einer freien Gruppe  $F$ ;  $W_1, W_2, \dots, W_k$  seien irgend  $k$  Gruppenelemente, geschrieben als „Worte“ in den Zeichen  $a_i^{\pm 1}$ .  $W_1, \dots, W_k$  heißen für  $k \leq p$  ein System von primitiven Elementen, wenn es einen Automorphismus von  $F$  gibt, der  $W_1, \dots, W_k$  in  $a_1, \dots, a_k$  überführt. Es wird ein Verfahren angegeben, um in höchstens  $L(W) - k$  Schritten zu entscheiden, ob dies möglich ist oder nicht, wobei  $L(W)$  die Anzahl der Zeichen  $a_i^{\pm 1}$  ist, die insgesamt in  $W_1, \dots, W_k$  auftreten. Dieselbe Frage wird für „zyklisch geschriebene“ Systeme von Worten gelöst, d. h. es wird entschieden, wann in den Klassen der mit  $W_1, \dots, W_k$  in  $F$  konjugierten Elemente ein System von  $k$  primitiven Elementen enthalten ist. Zum Beweise wird jedem System  $W_1, \dots, W_k$  ein Graph zugeordnet, der aus  $2p + 1$  Punkten  $O, A_i, A'_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) besteht und dessen Strecken sich bei gegebenen  $W_1, \dots, W_k$  so bestimmen: Dem ersten (resp. letzten) Zeichen  $a_i^{\pm 1}$  in jedem der  $W$  sei je eine Strecke  $O A'_i$  bzw.  $O A_i$  (bzw.  $A_i O$  resp.  $A'_i O$ ) zugeordnet. Allgemein sei einer Folge von 2 konsekutiven in einem  $W$  auftretenden Zeichen  $a_\nu, a_\mu, a_\nu a_\mu^{-1}, a_\nu^{-1} a_\mu, a_\nu^{-1} a_\mu^{-1}$  resp. eine Strecke  $A_\nu A'_\mu, A_\nu A_\mu, A'_\nu A'_\mu, A'_\nu A_\mu$  zugeordnet. Dann gilt: Der so konstruierte Graph zerfällt in zwei Teilgraphen, die nur einen Punkt  $P$  gemeinsam haben, der überdies von  $O$  verschieden ist, falls  $W_1, \dots, W_k$  ein primitives System bilden. Der Beweis benutzt die Methoden einer Arbeit von J. Singer, Trans. Amer. Math. Soc. 35, 88—111 (1933); dies. Zbl. 6, 185. — Anwendungen des Satzes auf topologische Fragen, insbesondere die Herstellung von Normalformen für Heegaard-Diagramme werden angedeutet.

*Magnus* (Frankfurt a. M.).

**Zorn, Max:** Discontinuous groups and allied topics. I. II. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 22, 36—39, 39—40 (1936).

Es werden topologische Räume (im Sinne von F. Hausdorff) untersucht, die ein vollständiges Umgebungssystem  $U$  folgender Art besitzen: Jede Umgebung eines (jeden) Punktes  $p$  enthält fast alle Umgebungen aus  $U$ , die eine hinreichend kleine Umgebung von  $p$  schneiden. Gleichwertig mit der Existenz eines derartigen Umgebungssystems ist, daß der Raum (1) metrisierbar ist und (2) beliebig kleine Zerlegungen in abgeschlossene Hüllen offener Mengen besitzt, so daß keine inneren Punkte

dieser Mengen in zwei dieser Mengen auftreten, jeder Punkt nur in endlich vielen auftritt und jeder Punkt eine nur endlich viele dieser Mengen schneidende Umgebung besitzt. — Aus (2) folgt: Ist  $t$  eine Abbildung und gibt es zu jedem Punkte  $p$  eine Umgebung  $U(p)$ , so daß  $t$  auf  $U(p)$  topologisch ist, und so, daß aus  $tU(p) = tU(q)$  folgt: Entweder ist  $U(p) = U(q)$  oder  $U(p)$  und  $U(q)$  sind fremd, dann existiert ein Fundamentalbereich von  $T$ , d. h. eine offene Menge  $F$ , auf der  $t$  topologisch ist, so daß der Bildbereich genau das Bild der abgeschlossenen Hülle von  $F$  ist und diskrete Teilmengen von  $\bar{F}$  auf diskrete Teilmengen des Bildbereiches abgebildet werden. Dies führt dann zu einer Definition diskontinuierlicher Gruppen, die einen Fundamentalbereich besitzen.

Reinhold Baer (Princeton, N. J.).

Siegel, Carl Ludwig: The volume of the fundamental domain for some infinite groups. Trans. Amer. Math. Soc. 39, 209—218 (1936).

Sei  $\mathfrak{X}$  die Koeffizientenmatrix einer positiv definiten quadratischen Form in  $n$  Variablen,  $|\mathfrak{X}|$  ihre Determinante,  $\sigma(\mathfrak{X})$  ihre Spur,  $d\mathfrak{X}$  das Volumenelement des  $n(n+1)/2$ -dimensionalen Raumes, in dem die Gesamtheit der  $\mathfrak{X}$  einen Bereich  $Q_0$  darstellt.  $Q_0$  ist invariant gegenüber der Gruppe der unimodularen ganzzahligen Substitutionen, deren Fundamentalbereich in  $Q_0$   $F_0$  heiße. Betrachtet man den durch  $|\mathfrak{X}| \leq q$  bestimmten Teil  $Q$  von  $Q_0$ , so hat der zugehörige Fundamentalbereich  $F$  ein Volumen  $v$ , das von Minkowski angegeben worden ist. Die Minkowskische Formel wird vom Verf. durch ein einfaches analytisches Verfahren bewiesen. — Ausgehend von der Gleichung

$$(\Phi(s) =) \prod_{k=0}^{n-1} \pi^{-(s+k)/2} \Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right) = \int_{Q_0} |\mathfrak{X}|^{s/2-1} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{X})} d\mathfrak{X},$$

die durch vollständige Induktion aus der Eulerschen Definition der Gammafunktion folgt, erhält man nämlich die Beziehung

$$2\Phi(s) \zeta(s) \zeta(s+1) \cdots \zeta(s+n-1) = \int_{F_0} |\mathfrak{X}|^{s/2-1} \sum_{|\mathfrak{A}| \neq 0} e^{-\pi\sigma(\mathfrak{A}'\mathfrak{X}\mathfrak{A})} d\mathfrak{X},$$

wo  $\mathfrak{A}$  alle ganzen Matrizen durchläuft. Das Residuum im Punkt  $s=1$  läßt sich nun aus dem Ausdruck auf der rechten Seite zu  $(n+1)v_1$  bestimmen, wo  $v_1$  das Volumen des Teiles von  $F_0$  mit  $|\mathfrak{X}| \leq 1$  ist. Durch Gleichsetzen mit dem Residuum der linken Seite ergibt sich  $v_1$  und dann die Minkowskische Formel aus  $v = v_1 q^{n+1/2}$ . — Das Verfahren läßt sich übertragen auf den Fall unimodularer Substitutionen aus einem algebraischen Zahlkörper, wenn  $Q$  definiert ist durch  $|\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_r \mathfrak{x}_{r+1}^2 \cdots \mathfrak{x}_{r+r_2}^2| \leq q$ , wo  $\mathfrak{x}_1, \dots, \mathfrak{x}_r$  positiv definite quadratische,  $\mathfrak{x}_{r+1}, \dots, \mathfrak{x}_{r+r_2}$  positiv definite Hermite'sche Formen sind. — Eine Anwendung ist die Berechnung des nichteuklidischen Volumens für den Fundamentalbereich der Modulgruppe in mehreren Variablen.

H. Spies (Hamburg).

Rachevsky, Pierre: Un schéma unifiant la théorie des groupes abstraits avec la théorie des groupes infinitésimaux de Lie. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1012—1013 (1936).

Unter einer verstärkten Gruppe (groupe renforcé) wird eine Gruppe verstanden, in der außer der gewöhnlichen Multiplikation eine zweite Operation  $(a, b)$  gegeben ist mit den Bedingungen

$$(a, b) \cdot (b, a) = e \quad (1)$$

$$(a, b) \cdot b \cdot (a, c) \cdot c = (a, bc) \cdot b \cdot c. \quad (2)$$

Wählt man  $(a, b) = a b a^{-1} b^{-1}$ , so sind (1), (2) von selbst erfüllt. Wählt man als Gruppe die additive Gruppe der infinites. Transf. einer Lieschen Gruppe und für  $(a, b)$  die Klammeroperation, so erhält man die Theorie der Infinitesimalgruppen. Beschränkt man die Untergruppen (bzw. Normalteiler) einer verstärkten Gruppe durch die Forderung, daß sie zu je zwei Elementen  $a, b$  (bzw. zu jedem  $a$ ) auch die Klammer  $(a, b)$  enthalten sollen, so gelten die Sätze von Jordan-Hölder und Remak. Sie bleiben sogar gelten, wenn die zulässigen Untergruppen und Normalteiler noch

weiter eingeschränkt werden, sofern nur Durchschnitte und Vereinigungsgruppen von zulässigen Untergruppen wieder zulässig sind. *van der Waerden* (Leipzig).

**Denjoy, Arnaud:** Sur les groupes homographiques. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 905—908 (1936).

Elementare Betrachtungen über kanonische Polygone und verschiedene Systeme von Erzeugenden bei fuchsschen Gruppen. *Myrberg* (Helsinki).

## Mengenlehre und reelle Funktionen.

**Sierpiński, W.:** Dernières recherches sur l'hypothèse du continu. (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj **9**, 56—60 (1935).

**Piccard, Sophie:** Contribution à l'étude des ensembles de distances. Čas. mat. fys. **64**, 159—161 (1935).

● **Vitali, G., e G. Sansone:** Moderna teoria delle funzioni di variabile reale. Pt. 1. (Consiglio naz. d. ricerche. Monogr. di mat. applicata.) Bologna: Nicola Zanichelli 1935. 183 pag. L. 40.—.

The present monograph, practically finished by late Vitaly, is edited by Sansone. Content: Ch. I (Sets in general and transfinite numbers), Ch. II (Theory of measure of point sets on a straight line), Ch. III (Analisi delle funzioni), Ch. IV (Integration of measurable functions), Ch. V (Differentiation). As a novel feature of the book a discussion of a special class of singular functions (scarti, scarti elementari, introduced in an older paper by Vitaly) should be mentioned. *J. D. Tamarkin.*

**Malchair, Henri:** Sur les fonctions de classe  $\alpha$  qui sont limites de suites monotones de fonctions de classes  $< \alpha$ . Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **5**, 12—13 (1936).

In reference to the following known theorem of F. Bureau [Mém. Soc. Roy. Sci. Liège **17** (1932); this Zbl. **6**, 49]: Let  $f(x)$  be upper-semi-continuous and non-decreasing in  $(a, b)$ ; and let  $g(x)$  be of class  $F^\alpha$ , defined in  $(c, d)$ , and with functional values lying in  $(a, b)$ ; then, if  $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \dots \geq f_n(x) \geq \dots$  is a non-increasing sequence of non-decreasing, continuous functions having  $f(x)$  as limit, the function  $f[g(x)]$  is an  $F^\alpha$  or a function of class  $< \alpha$  in  $(c, d)$  — the present note proves that the theorem holds without the restriction that  $f_n(x)$  be non-decreasing. *Blumberg* (Columbus).

**Young, R. C.:** On the deviation of a function. J. London Math. Soc. **11**, 37—43 (1936).

The deviation (écart) of a function  $g(t)$  of bounded variation is defined by  $R = R(g) = \overline{\lim} (2\pi)^{-1} \left| \int_0^{2\pi} e^{int} dg(t) \right|$ . The author proves that if  $h(t)$  is integrable with respect to  $g(t)$  and if  $g$  is of zero deviation then the integral  $\int_0^t h(t) dg(t)$  is also of zero deviation. The case where  $h(t)$  is bounded was known before [Mme Gruczevska's lemma, cf. Rajchmann, Math. Ann. **101**, 688—690 (1929)]. Various consequences of this theorem are discussed, among them the known theorem of Czillag-Neder to the effect that if  $g(t)$  is of bounded variation and if its Fourier coefficients are  $o(1/n)$  then  $g(t)$  has only removable discontinuities, and conversely. [Cf. Alexits, Math. Z. **27**, 65 (1927).] *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Maximoff, Isaie:** Sur les fonctions ayant la propriété de Darboux. Prace mat.-fiz. **43**, 241—265 (1936).

**Sierpiński, W.:** Sur une fonction parfaitement discontinue et cependant partout partiellement continue. Prace mat.-fiz. **43**, 267—271 (1936).

A function having the Darboux property is one which takes on between every  $a$  and  $b$  every value between  $f(a)$  and  $f(b)$ .  $f$  is said to be "partially continuous" at  $x_0$  if there exists a perfect set  $P$  having  $x_0$  as limit point from both sides such that  $f$  is continuous at  $x_0$  relatively to  $P$ . If  $f$  is not partially continuous at  $x_0$ , it is said to be "totally discontinuous" at  $x_0$ . The purpose of the article of I. Maximoff

is to study the Darboux property in connection with this notion of partial continuity. It is preliminary to an article to be published on transformations into exact derivatives of functions of Baire's first class having the Darboux property. The following theorems are proved: a) The set of points of total discontinuity of a function having the property of Baire is a set always of the first category. b) If  $f$  is a function of Baire's classification, the set of points of total discontinuity is at most denumerable. c) If  $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , there is a function partially discontinuous at every point and yet discontinuous on every perfect set. d) There exists a function totally discontinuous at every point. e) If a function of Baire's classification has the Darboux property, it is everywhere partially continuous. f) A necessary and sufficient condition that a function of Baire's first class possess the Darboux property is that it be partially continuous at every point. In his article, W. Sierpiński shows the validity of c) just by means of Zermelo's theorem on normal order without resort to the continuum hypothesis.

Blumberg (Columbus).

**Ruziewicz, Stanislaw:** Sur les fonctions d'une infinité de variables. Fundam. Math. 26, 52—55 (1936).

Beitrag zu den Erweiterungen auf den unendlichen Fall des Ergebnisses von L. Bieberbach (dies. Zbl. 2, 187; vgl. ebenda Ref. über A. Lindenbaum, 6, 340 u. W. Sierpiński, 11, 340). — I. Es gibt eine wachsende Funktion  $f(x)$  in  $(0 < x < 1)$  und eine Folge reeller Zahlen  $\{c_n\}$ , derart, daß für jede Funktion unendlich vieler Veränderlicher  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  mit  $0 < x_n < 1$  eine meßbare Funktion  $\varphi_F(x)$  mit  $0 < x < 1$  existiert, die für jede Wertenfølge  $\{x_n\}$  der Gleichung  $F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \varphi_F[c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n) + \dots]$  genügt. II. Für jede Menge  $\Phi$  von der Mächtigkeit des Kontinuums von Funktionen unendlich vieler Veränderlicher  $\{x_n\}$  ( $0 < x_n < 1$ ) gibt es eine wachsende Funktion  $f(x)$  in  $(0 < x < 1)$ , ferner eine Folge reeller Zahlen  $\{c_n\}$  und eine meßbare Funktion  $\varphi(x)$  mit  $0 < x < 1$ , derart, daß für jede Funktion  $F \in \Phi$  eine Zahl  $t_F$  ( $0 < t_F < 1$ ) existiert, die für jede Wertenfølge  $\{x_n\}$  der Gleichung

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = \varphi[t_F + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + \dots + c_n f(x_n) + \dots]$$

genügt.

B. Knaster (Warszawa).

**Jarník, Vojtěch:** Sur une propriété des fonctions continues. Čas. mat. fys. 65, 53 bis 63 (1936).

Comme généralisation d'un théorème déjà démontré par l'auteur dans les Fundam. Math. 21, 48—58 (1933) (voir ce Zbl. 7, 401) il prouve: si  $\varphi(h)$  est une fonction impaire et continue pour  $-\infty < h < +\infty$  avec  $\varphi(h) > 0$  pour  $h > 0$  et si  $C$  est l'espace métrique de toutes les fonctions réelles d'une variable réelle qui sont définies et continues dans  $(0, 1)$ , avec la définition usuelle de la distance, alors il existe dans  $C$  un ensemble résiduel  $A$ , tel que toute fonction  $f(x) \in A$  possède la propriété que pour tout  $x$  avec  $0 < x < 1$  et tout  $a$  avec  $-\infty \leq a \leq +\infty$  il existe une suite  $h_1, h_2, \dots$  avec  $h_n \neq 0$ ,  $h_n \rightarrow 0$ ,  $\frac{f(x+h_n) - f(x)}{\varphi(h_n)} \rightarrow a$ .

J. Ridder (Groningen).

**Ward, A. J.:** On the differentiation of additive functions of rectangles. Fundam. Math. 26, 167—182 (1936).

Ce mémoire contient une série des résultats qui peuvent être regardés comme des généralisations très intéressantes des théorèmes connus sur les nombres dérivés des fonctions d'une variable réelle. Etant donnée une fonction additive de rectangle  $F(R)$ , l'auteur désigne par  $\bar{D}(x, y)$ ,  $\bar{F}(x, y)$  et  $\bar{D}_m(x, y)$  respectivement  $\limsup_{\substack{R \rightarrow 0 \\ d(R) \rightarrow 0}} F(R)/\text{mes } R$  où  $R$  est respectivement un rectangle quelconque contenant  $(x, y)$ , un carré quelconque contenant  $(x, y)$  et un carré quelconque dont  $(x, y)$  est un sommet. D'une manière analogue on définit les dérivés inférieurs  $D(x, y)$ ,  $F(x, y)$  et  $D_m(x, y)$  (on ne considère que les rectangles et les carrés aux côtés parallèles aux axes). On sait que, contrairement aux dérivés  $\bar{F}(x, y)$  et  $\bar{F}(x, y)$ , les nombres  $D(x, y)$  et  $\bar{D}(x, y)$  peuvent différer presque partout même pour une fonction  $F(I)$  absolument continue.

Cependant, comme l'auteur le montre, on a  $\underline{D}(x, y) = \overline{D}(x, y)$  dans presque tous les points où  $-\infty < \underline{D}(x, y) \leq \overline{D}(x, y) < \infty$ . En généralisant aux fonctions additives quelconques un théorème établi récemment par A. S. Besicovitch [Fundam. Math. 25, 209—216 (1935); ce Zbl. 12, 58] pour les fonctions absolument continues, l'auteur démontre que  $\underline{D}(x, y) = \underline{D}_m(x, y)$  presque partout où  $\underline{D}(x, y) > -\infty$ . Ce résultat est déduit d'un théorème plus général concernant la dérivation par rapport aux certaines familles de rectangles que l'auteur appelle complètement régulières. D'après un théorème bien connu, si une fonction d'une variable réelle  $f(x)$  possède un nombre dérivé supérieur de Dini différant de  $+\infty$  sur un ensemble  $E$ , la fonction  $f(x)$  possède presque partout sur  $E$  une dérivée approximative coïncidant avec le dérivé extrême considéré. L'auteur établit l'extension suivante de ce théorème: Si  $\underline{D}(x, y) > -\infty$  dans un ensemble  $E$ , on a, pour tout  $\eta > 0$ , dans presque tout point  $(x_0, y_0)$  de cet ensemble  $\lim_{d(S) \rightarrow 0} \text{mes}_e [S \cdot G(x_0, y_0, \eta)] = 0$ , où  $S$  désigne un carré quelconque contenant  $(x_0, y_0)$  et  $G(x_0, y_0, \eta)$  l'ensemble de points  $(x, y)$  tel que  $|F(R)/\text{mes} R - \underline{D}(x_0, y_0)| > \eta$ ,  $R$  étant le rectangle aux sommets opposés dans les points  $(x_0, y_0)$  et  $(x, y)$ . Parmi autres résultats on peut mentionner la démonstration de la mesurabilité des nombres dérivés  $\underline{D}(x, y)$  et  $\overline{D}(x, y)$  pour toute fonction de rectangle (un théorème analogue sur les dérivés  $\underline{F}(x, y)$  et  $\overline{F}(x, y)$  a été établi par S. Banach [Fundam. Math. 6, 170—188 (1924)]).

Saks (Warszawa).

**Perkins, F. W.:** A set of independent conditions that a real function be everywhere differentiable. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 93—98 (1936).

In this paper is contained a proof of the following theorem: "The real functions  $\{f(x)\}$  of a real variable which have for all  $x$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) a finite derivative, are characterized by four independent conditions: every function  $f(x)$  of this kind is contained in a set  $C$  of real functions of the real variable  $x$  such that: I.  $X(x) = x$  is a function in  $C$ ; there exist constants  $x_1$  and  $q$  such that for the corresponding function  $\bar{X}(x)$  all values are different from  $q$  and  $\bar{X}(x_1) = 1$ . II. Given any constant  $x_2$  and any function  $f(x)$  in  $C$ , then  $g(x) = f(x + x_2)$  is in  $C$ , and the corresponding functions  $\bar{g}$  and  $\bar{f}$  satisfy the equality  $\bar{g}(x) = \bar{f}(x + x_2)$ . III. There exists a constant  $x_3$  such that if  $f_1(x)$  and  $f_2(x)$  are in  $C$ , and  $k$  is an arbitrary constant, then  $F(x) = f_1(x) + k f_2(x)$  is in  $C$ , and  $\bar{F}(x_3) = \bar{f}_1(x_3) + k \bar{f}_2(x_3)$ . IV. There exists a constant  $x_4$  such that if for  $f_1$  in  $C$ ,  $f_2$  in  $C$  there is  $f_1(x_4) = f_2(x_4) = \bar{f}_1(x_4) = 0$  and  $\bar{f}_2(x_4) > 0$ , then there is a neighbourhood of  $x_4$  throughout which  $f_1(x) \leq |f_2(x)|$ ." J. Ridder.

**Hirschfeld, H. O.:** Continuation of differentiable functions through the plane. Quart. J. Math., Oxford Ser. 7, 1—15 (1936).

Etant donné un domaine ouvert  $G$ , l'auteur appelle une fonction  $f(x, y)$  définie dans  $G$  fonction de la classe  $(C^m)$  dans le domaine fermé  $\bar{G}$ , lorsque  $f(x, y)$  est continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'au  $m$ -ième ordre dans  $G$  et lorsqu'elle possède, ainsi que ces dérivées partielles, les valeurs limites continues sur la frontière de  $G$ . M. Whitney [Ann. of Math., II. s. 35, 482—485 (1934); ce Zbl. 9, 309] a établi une condition très générale portant sur le domaine  $G$ , pour qu'une fonction  $(C^m)$  dans  $\bar{G}$  puisse être prolongée comme une fonction  $(C^m)$  sur le plan entier. M. Hirschfeld discute certains cas particuliers où le prolongement peut être réalisé par les formules plus simples que dans le cas général; ce sont les prolongements traversant respectivement un arc satisfaisant à la condition de Lipschitz, un arc différentiable des deux premiers ordres et une circonférence. L'auteur construit un exemple d'une fonction  $f(x, y)$  dans un domaine  $G$  limité par une courbe continue simple, telle que  $f(x, y)$  est analytique dans tout domaine fermé contenu dans  $G$  et appartient à toutes les classes  $(C^m)$  dans  $\bar{G}$ , tandis qu'elle ne peut être prolongée au delà de  $G$ , même comme une fonction  $(C^1)$ , en aucun point de la frontière.

Saks (Warszawa).

**Cioranescu, N.:** Sur les dérivées polydimensionnelles d'une fonction de plusieurs variables. Enseignement Math. 34, 220—227 (1935).

Etant donnée une fonction  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $n$  variables, on fait correspondre à tout intervalle  $k$ -dimensionnel  $I_k$  (c. à d. à tout parallélépipède  $k$ -dimensionnel aux arêtes parallèles aux axes dans l'espace  $n$ -dimensionnel  $E_n$ ) une expression connue  $f_k(I_k)$  dépendant linéairement des valeurs que  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  prend aux sommets de  $I_k$ ; p. ex.  $f_n(I_n)$  désigne la fonction additive d'intervalle  $n$ -dimensionnel dans  $E_n$ , attachée à la fonction donnée de point  $f$ . En suivant M. Bögel [J. reine angew. Math. 170, 197—217 (1934); ce Zbl. 8, 250] l'auteur étudie la limite  $f(I_k)/\text{vol } I_k$ , où  $I_k$  est un intervalle  $k$ -dimensionnel aux sommets tendant vers le sommet fixé dans un point  $P^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  et  $\text{vol } I_k$  désigne le volume  $k$ -dimensionnel de  $I_k$ . L'auteur exprime la valeur de cette limite (la dérivée  $k$ -dimensionnelle de  $f$ ) en termes des coefficients différentiels partiels de  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dont l'existence jusqu'au  $k$ -ième ordre est supposée. Ces formules sont généralisées au cas où les intervalles sont remplacés par les parallélépipèdes quelconques dont les arêtes ne sont pas forcément parallèles aux axes.

Saks (Warszawa).

## Analysis.

● **Madelung, Erwin:** Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers. Unter Mitarbeit v. Karl Boehle und Siegfried Flügge. 3. verm. u. verb. Aufl. (Die Grundlehren d. math. Wiss. in Einzeldarstell. mit besonderer Berücksichtigung d. Anwendungsgeb. Hrsg. v. R. Courant. Gemeinsam mit W. Blaschke, F. K. Schmidt u. B. L. van der Waerden. Bd. 4.) Berlin: Julius Springer 1936. XIII, 381 S. u. 25 Fig. RM. 27.—

The additions and improvements that have been made in this useful compendium will be of aid to the numerous mathematical physicists who are interested in relativity, quantum theory and chemical physics. There is now a section dealing with the theory of groups in which among other things the rotation groups are discussed. The properties of transformations are developed both in this section and in the earlier section devoted to vector analysis. The methods of tensor analysis are used freely in some parts of the book and applications are made later on in the accounts of the recent theories of gravitation and cosmology. — The section dealing with quantum theory is a noteworthy feature for it contains accounts of the Schrödinger theory, the many body problem, Pauli's principle, asymmetric Eigenfunktionen and the Dirac theory. The statistical methods are explained in a section following the one on thermodynamics. — Physical principles are carefully explained and the attempt is made to unify physics as much as possible in the presentation. Thus for example by the use of Poisson's time of relaxation, the Navier-Stokes equations of hydrodynamics are derived by a transition process from the equations of the theory of elasticity. H. Bateman.

**Crudeli, Umberto:** Inversione delle derivazioni. Boll. Un. Mat. Ital. 15, 65—66 (1936).

**Marcouchevitch, A.:** Sur le second théorème de la moyenne. Rec. math. Moscou 42, 567—582 u. franz. Zusammenfassung 582 (1935) [Russisch].

A general formulation of the second law of mean is given by the formula

$$\int_E f(x) \varphi(x) dx = N \int_{E(N, n)} f(x) dx + n \int_{E-E(N, n)} f(x) dx.$$

Here  $f$  and  $\varphi$  are integrable over a bounded measurable set  $E$ ,  $\varphi$  is bounded and  $n, N$  are arbitrary numbers satisfying  $n \leq \inf_E \varphi \leq \sup_E \varphi \leq N$ . The author discusses

various necessary and sufficient conditions under which, in the case where  $E$  reduces to an interval  $(a, b)$ , the set  $E(N, n)$  can be chosen as the sum of a finite number of intervals.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

**Barrow, D. F.: Infinite exponentials.** Amer. Math. Monthly **43**, 150—160 (1936).

Es handelt sich um eine elementare (graphische) Diskussion der Konvergenz

unendlich iterierter Exponentiale  $E(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_0^{a_1^{a_2^{\dots^{a_n}}}}$ ,  $a_i \geq 0$ . Das  
Hauptergebnis ist:  $E$  konvergiert, wenn schließlich  $e^{-e} \leq a_i \leq e^e$  ist. Es werden  
noch die Grenzfälle  $a_i = e^{\frac{1}{e}} + \varepsilon_i$  bzw.  $a_i = e^{-e} - \varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_i \rightarrow +0$ , besprochen.

Rogosinski (Königsberg i. Pr.).

**La Menza, F.: Funktionalsysteme von linearen Ungleichungen.** Bol. Semin. mat. Argent. **4**, Nr 16, 30—33 (1934) [Spanisch].

Man betrachte die lineare Ungleichung

$$A_1(P)x_1 + A_2(P)x_2 + \dots + A_n(P)x_n + C(P) > 0,$$

wobei  $A_i(P)$  und  $C(P)$  reelle Funktionen eines Punktes  $P$  sind, welcher eine Menge  $\Gamma$  des  $r$ -dimensionalen Raumes durchläuft. Der Verf. sucht Bedingungen für die Verträglichkeit eines solchen Funktionalsystems linearer Ungleichungen. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt zunächst die Beschränktheit nach unten der Funktion  $C(P) \left( \sum_1^n A_i^2(P) \right)^{-\frac{1}{2}}$  als notwendige Bedingung. Der Verf. gibt ferner eine umständliche und unklar formulierte notwendige und hinreichende Bedingung.

I. J. Schoenberg (Swarthmore, Pa.).

**Chaundy, T. W., and Eric Phillips: The convergence of sequences defined by quadratic recurrence-formulae.** Quart. J. Math., Oxford Ser. **7**, 74—80 (1936).

The authors consider the convergence of the sequence defined by the recurrence-formula

$$u_{n+1} = au_n^2 + 2bu_n + c,$$

where  $a, b, c$  are real and independent of  $n$ . By simple substitutions this is reduced to the simpler form

$$u_{n+1} - u_n = (u_n - k)(u_n - 1 + k).$$

It is proved that (I) if  $k$  is not real,  $u_n \rightarrow \infty$  monotonically; (II) if  $|u_0| > k$ ,  $u_n \rightarrow \infty$  monotonically; (III) if  $|u_0| < k$  and  $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$ ,  $u_n \rightarrow 1 - k$ ; (IV) if  $|u_0| < k$  and  $\frac{3}{2} < k \leq 2$ ,  $u_n$  oscillates finitely; (V) if  $|u_0| < k$  and  $k > 2$ ,  $u_n \rightarrow \infty$ , except when  $u_0$  belongs to a certain set of measure zero, and then  $u_n$  oscillates finitely. W. N. Bailey.

**Roman, Irwin: An Euler summation formula.** Amer. Math. Monthly **43**, 9—21 (1936).

**Delsarte, J.: Les fonctions „moyenne-périodiques“.** J. Math. pures appl., IX. s. **14**, 403—453 (1935).

This memoir is an elaboration of results previously announced (ref. below). Let  $D_0$  be a domain of dimension  $\leq n$  in a space of  $n$  dimensions, let  $D_M$  be the transform of  $D_0$  under the translation which takes 0 into  $M$ . Let  $K(M, P)$  be a kernel which depends only upon  $MP$ .  $f(M)$  is mean periodic relative to  $K(M, P)$  and  $D_0$  if

$$\delta_M[f] = \int_{D_M} K(M, P) f(P) d\omega_P \equiv 0.$$

In the first chapter of this paper the author discusses the Fredholm-Nörlund equation  $\delta_M[f] = g(M)$  for  $n = 1, 2$ . The main tools are certain Bernoulli polynomials and a generalization of the Euler-Maclaurin summation formula which lead to a principal solution (cf. Zbl. **8**, 253 for details in the case  $n = 1$ ). In the second chapter the expansion of a mean periodic function of one variable is given in terms of exponential mean periodic functions (Zbl. **8**, 314). Here the bilinear operator

$$K[f, g] = \delta_0 \left\{ \int_0^\xi f(\xi - \eta) g(\eta) d\eta \right\}$$

comes into play. If  $A(\lambda) = \delta_0[e^{\lambda\xi}]$ , and  $\{\lambda_n\}$  is the set of roots of  $A(\lambda) = 0$  (all but a finite number of which are located in small sectors about the imaginary axis), then  $K[e^{\lambda_i\xi}, e^{\lambda_j\xi}] = \delta_{ij}A'(\lambda_j)$ . If  $f(x)$  is mean periodic relative to  $K(x)$  and the interval  $(0, a)$  for all  $x$  in this interval, and all the  $\lambda$ 's are simple, then the expansion of  $f(x)$  becomes

$$f(x) \sim \sum_1^\infty K[f(\xi), e^{\lambda_i\xi}] \{A'(\lambda_i)\}^{-1} e^{\lambda_i x}. \quad (A)$$

Multiple roots lead to natural modifications. The validity of this expansion is established with the aid of the method of Cauchy and Picard when  $f(x)$  is of bounded variation provided  $K(x)$  is of bounded variation,  $K(0+0) \neq 0$ ,  $K(a-0) \neq 0$ , the continuous part of  $K(x)$  being absolutely continuous. The author finally considers the problem of the mean periodic prolongation for all  $x$  of a function which is given as mean periodic in  $(0, a)$ . If  $f(x)$  is of bounded variation, the convergence of the series (A) for all  $x$  is a nec. and suff. condition for the existence of such a prolongation which is then given by the series.

*E. Hille (New Haven, Conn.).*

● **Remes, Eugène:** Sur les méthodes pour réaliser la meilleure approximation des fonctions d'après le principe de Tchebycheff. Kiev: Verl. d. Ukrain. Akad. d. Wiss. 1935. 162 S. u. 9 Fig. [Ukrainisch].

Approximation d'une fonction  $f(x, y, z, \dots)$  à l'aide d'une expression  $\varphi(x, y, z, \dots)$  1° linéaire par rapport à l'ensemble des variables  $x, y, z, \dots$ , 2° linéaire par rapport à chacune des variables  $x, y, z, \dots$ , le domaine fondamental étant respect. déterminé par les inégalités de la forme 1°  $1 \geq x \geq y \geq z \geq \dots \geq 0$ , 2°  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b, \dots$  Cas particulier où  $f = (x^e + y^e + z^e + \dots)^{1/e}$ . Intégration numérique de l'équation  $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ . Interpretations géométriques relatives au problème de Poncelet

( $f = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ). Approximations polygonales d'une courbe convexe. Problème de l'approximation d'un ensemble à deux dimensions à l'aide d'une courbe polynomiale  $y = P_n(x)$  de degré  $n$ . Méthodes du calcul numérique des polynômes de Tchebycheff  $\Pi_n(x)$ . Exemple  $f(x) = |x|$ : les coefficients des  $\Pi_n(x)$  sont donnés pour  $n \leq 10$ . Résolution d'un système surabondant (fini ou infini) des équations linéaires. — En signalant (dans la préface) le rôle que les méthodes de Tchebycheff sont appelées à jouer dans la théorie des fonctions, l'auteur insiste surtout sur l'importance de leurs applications techniques, et c'est au progrès de ces applications que son livre, dans sa plus grande partie, est destiné à contribuer.

*W. Gontcharoff (Moskau).*

**Sokolov, G.:** Sur quelques propriétés extrémales des sommes trigonométriques. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 6/7, 857—882 u. franz. Zusammenfassung 883—884 (1935) [Russisch].

Etant donné  $f(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$ , où  $|f(x)| \leq L$ , l'auteur étudie quel sont les maxima  $M_\alpha$  et  $M_\alpha^*$  de chacun des modules  $\left| \sum_{\nu=0}^n n^\alpha (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right|$  et  $\left| \sum_{\nu=0}^n n^\alpha (b_\nu \cos \nu x - a_\nu \sin \nu x) \right|$ . Il prouve pour  $\alpha \geq 1$ ,  $M_\alpha = M_\alpha^* = n^\alpha L$ ; pour  $0 \leq \alpha \leq 1$ , on a  $M_\alpha \leq \frac{2n^\alpha L}{1+\alpha}$ , quel que soit  $n$ , toutefois le signe d'égalité n'a lieu que pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha \rightarrow 0$ , en tout cas  $M_\alpha > n^\alpha L$  et  $M_\alpha \geq \frac{4n^\alpha L}{2+3\alpha+\alpha^2}$ , la dernière inégalité étant plus forte que la première, si  $0 < \alpha < m \pm 0,56 (m^2 + 3m - 2 = 0)$ , les inégalités correspondantes pour le maximum conjugué  $M_\alpha^*$  trouvées par l'auteur sont plus compliquées et moins précises: pour  $n \rightarrow \infty$ , il donne la forme asymptotique  $M_\alpha^* \sim L \left[ A(\alpha) n^\alpha + \frac{B(\alpha)}{\alpha} (n^\alpha - 1) \right]$ , où  $A(\alpha) > 0$ ,  $B(\alpha) > 0$  sont bornés supérieurement et inférieurement uniformément par rapport à  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$ . Il donne de plus, pour  $0 > \alpha$ , et pour toute valeur de  $n$ ,  $\left| \sum_0^n (\nu + s)^\alpha (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x) \right| \leq L$ .

*S. Bernstein (Leningrad).*

**Ghika, Alexandre:** Sur les systèmes de fonctions orthogonales d'une variable complexe. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 278—280 (1936).

Let  $D$  be a finite region bounded by the rectifiable Jordan curves  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ ; here  $C_0$  contains all the other curves. Denoting by  $\alpha_0$  a point interior to  $D$ , by  $\alpha_\nu$  a point interior to  $C_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ), the author orthogonalizes the sequence

$$(z - \alpha_0)^m, \quad (z - \alpha_1)^{-m-1}, \quad \dots, \quad (z - \alpha_n)^{-m-1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

along the total boundary  $C$  of  $D$ . Denoting by  $\varphi_k(z)$  the general orthogonal function, any function  $f(z)$  regular in  $D$  and fulfilling

$$f(z) = 1/2\pi i \int_C \frac{f(x)}{x-z} dx, \quad z \text{ in } D$$

( $|f(x)|^2$  is integrable on  $C$  in Lebesgue's sense) can be developed in terms of the  $\varphi_k(z)$ 's in Fourier's manner. This development is convergent in the mean on the boundary; it is absolutely and uniformly convergent in every closed region interior to  $D$ . Szegő.

**Boas jr., R. P.:** Necessary and sufficient conditions in the moment problem for a finite interval. Duke math. J. **1**, 449—476 (1935).

This solution of the moment problem is connected with those of T. H. Hilbrandt and of D. V. Widder (this Zbl. **4**, 207 and **8**, 306—307). The author uses Widder's inversion operator

$$L_{k,t}\{\mu_n\} = \frac{(n+k+1)!}{n!k!} (-1)^k \Delta^k \mu_n, \quad n = \left[ \frac{kt}{1-t} \right], \quad 0 \leq t < 1, \\ L_{k,1}\{\mu_n\} = L_{k,1-}\{\mu_n\}.$$

A nec. and suff. cond. that the moment problem have a solution of bounded variation in  $0 \leq t \leq 1$ , is that

$$\int_0^1 |L_{k,t}\{\mu_n\}| dt < K. \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (A)$$

The solution is the integral of (B) a function in  $L_r(0, 1)$ ,  $r > 1$ , (C) a bounded function, (D) a function in  $L_1(0, 1)$ , (E) a function of bounded variation, (F) a continuous function, if and only if, respectively,

$$\int_0^1 |L_{k,t}\{\mu_n\}|^r dt < K^r, \quad (B)$$

$$|L_{k,t}\{\mu_n\}| < K, \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (C)$$

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} \int_0^1 |L_{j,t}\{\mu_n\} - L_{k,t}\{\mu_n\}| dt = 0, \quad (D)$$

$$\int_0^1 |dL_{k,t}\{\mu_n\}| < K, \quad (E)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_{k,t}\{\mu_n\} \text{ exists uniformly in } 0 \leq t \leq 1. \quad (F)$$

It is shown that condition (A) is algebraically equivalent to the corresponding condition of Hausdorff. The author also investigates the existence of a continuous solution not necessarily of bounded variation. E. Hille (New Haven, Conn.).

**Wintner, Aurel:** Gaussian distributions and convergent infinite convolutions. Amer. J. Math. **57**, 821—826 (1935).

Aus der Bernoulli-Verteilung  $\beta(x) = 0$  für  $x < -1$ ,  $= \frac{1}{2}$  für  $-1 < x < 1$ ,  $= 1$  für  $x > 1$  und einer positiven Folge  $\{b_n\}$  entsteht durch wiederholte Faltungen und Grenzübergang die Verteilungsfunktion  $\tau(x) = \beta(x/b_1) * \beta(x/b_2) * \beta(x/b_3) * \dots$ , welche dann und nur dann existiert, falls  $\sum_1^\infty b_n^2$  konvergiert. Unter dieser Voraussetzung werden die folgenden Sätze bewiesen: I. Es existieren alle Momente  $\int_{-\infty}^\infty x^m d\tau(x)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ )

und die Werte derselben entsprechen einem bestimmten Momentenproblem, d. h.  $\tau(x)$  ist durch die Werte seiner Momente eindeutig bestimmt. II. Für genügend kleinen Wert

von  $\lambda$  wird  $\tau(x)$  von der Gaußschen Funktion  $\omega_\lambda(x) = (\lambda/\pi)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x \exp(-\lambda u^2) du$  im Un-

endlichen majorisiert, d. h. es ist  $\tau(x) = O(\omega_\lambda(x))$  für  $x \rightarrow -\infty$ ,  $1 - \tau(x) = O(1 - \omega_\lambda(x))$  für  $x \rightarrow +\infty$ . Die sehr durchsichtigen Beweise beruhen auf dem Algorithmus, welcher die Momente einer mehrfachen Faltung durch die Momente der einzelnen Faktoren ausdrückt (dies. Zbl. 5, 405). Entscheidend ist dabei die Symmetrie der Bernoulli-Verteilung, und tatsächlich beweist der Verf. die obigen Sätze für allgemeinere Klassen von Faltungen symmetrischer Verteilungsfunktionen.

I. J. Schoenberg.

**Wintner, Aurel: On convergent Poisson convolutions.** Amer. J. Math. 57, 827 bis 838 (1935).

Fortsetzung der Untersuchungen des Verf. und seiner Mitarbeiter über Faltungen von Folgen von Verteilungsfunktionen von besonderem Typus (dies. Zbl. 10, 59; 11, 157; 12, 63). Hier werden die Verteilungen  $\pi(x; a, q)$  ( $a > 0, q > 0$ ) betrachtet, wobei  $\pi(x; a, q) = 0$  für  $x < 0$ ,  $= 1 - q$  für  $0 < x < a$ ,  $= 1$  für  $x > a$ , und die unendliche Faltung  $\varrho(x) = \pi(x; a_1, b_1) * \pi(x; a_2, b_2) * \dots$  für gegebene Folgen  $\{a_n\}, \{b_n\}$ ;

sie konvergiert absolut, falls  $\sum_1^\infty a_n q_n$  konvergiert. Bezüglich der Glätte von  $\varrho(x)$

gilt folgender Satz. Unter den Voraussetzungen  $\log a_n \sim \log n^{-\lambda}$ ,  $\log q_n \sim \log n^{-\nu}$ , wobei  $\frac{1}{2} < \nu < 1 < \lambda + \nu$ , besitzt  $\varrho(x)$  überall beliebig hohe Ableitungen. Die Voraus-

setzungen sind in gewissem Sinn die besten ihrer Art. Dieses auf den Größenordnungen von  $a_n$  und  $q_n$  beruhende Glattheitskriterium läßt sich nicht, wie der Verf. bemerkt,

auf gewisse spezielle zahlentheoretisch interessante Faltungen anwenden, wobei sich die Betrachtung der arithmetischen Eigenschaften der entsprechenden  $a_n$  und  $q_n$

nicht vermeiden läßt. Der Verf. untersucht ferner die symmetrische Bernoulli-Verteilung  $\beta(x) = 0$  für  $x < -1$ ,  $= \frac{1}{2}$  für  $-1 < x < 1$ ,  $= 1$  für  $x > 1$ , und die Fal-

tung  $\sigma(x) = \beta(x/b_1) * \beta(x/b_2) * \dots$ , ( $b_n > 0$ ), welche existiert, falls  $\sum_1^\infty b_n^2$  konvergiert,

und beweist den folgenden Satz: Falls  $\sum b_n^2 < \infty$  und  $\log b_n \sim \log n^{-\alpha}$ , so hat  $\sigma(x)$

überall Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Ferner ist  $\sigma(x)$  längst der reellen Achse

analytisch regulär oder nicht, je nachdem  $\alpha < 1$  oder  $\alpha > 1$ . Die Beweise beruhen

auf Abschätzungen der Fouriertransformierten in Verbindung mit der Lévy'schen Um-

kehrungsformel. Endlich werden Fälle von stärker wachsenden  $b_n$  betrachtet, wo die

Glätte von  $\sigma(x)$  durch besondere Methoden nachgewiesen wird.

I. J. Schoenberg (Swarthmore, Pa.).

**Wintner, Aurel: A note on the convergence of infinite convolutions.** Amer. J. Math. 57, 839 (1935).

Es sei  $\{\sigma_n(x)\}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) eine Folge von Verteilungsfunktionen. Mit

$M_\delta(\sigma_n) = \int_{-\infty}^\infty |x|^\delta d\sigma_n(x)$  beweist der Verf. den folgenden Satz. Wenn für ein gewisses  $\delta$ ,

mit  $0 < \delta \leq 1$ , die Reihe  $\sum_{n=1}^\infty M_\delta(\sigma_n)$  konvergiert, so konvergiert auch die unendliche

Faltung (1)  $\sigma_1 * \sigma_2 * \sigma_3 * \dots$ . Ich möchte hier folgende Verschärfung dieses Kriteriums

formulieren. Mit den Bezeichnungen  $\|x\| = \min(1, |x|)$  und  $\tilde{M}_\delta(\sigma_n) = \int_{-\infty}^\infty \|x\|^\delta d\sigma_n(x)$

gilt der Satz: Wenn für ein gewisses  $\delta$ , mit  $0 < \delta \leq 1$ , die Reihe  $\sum_1^\infty \tilde{M}_\delta(\sigma_n)$  konvergiert,

so konvergiert auch die Faltung (1). Der einfache Beweis folgt aus den Ungleichungen

$|\sin x| \leq \|x\|$ ,  $\|xt\| \leq \|x\| \cdot \max(1, |t|)$ , nebst den Überlegungen des Verf.

I. J. Schoenberg (Swarthmore, Pa.).

**Krawtchouk, M., et D. Topoliansky:** Notice sur l'intégrale de Fourier. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math. **1**, 42—44 (1935) [Ukrainisch].

Les auteurs donnent une démonstration nouvelle de la formule de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt,$$

en la traitant comme cas limite de la somme de Fourier.

*Autoreferat.*

**Levinson, Norman:** On a theorem of Ingham. J. London Math. Soc. **11**, 6—7 (1936).

A "function theoretical" (based on Carleman's formula) proof of necessity of a condition used by Ingham (this Zbl. **8**, 306). *J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Wolf, František:** On the  $(C, k)$  summability of a trigonometrical integral. Proc. London Math. Soc., II. s. **40**, 502—523 (1936).

The author discusses the equiconvergence property between the Cesàro sums of a trigonometric integral  $\int_0^{\infty} e^{i\lambda x} dA(\lambda)$  and a certain trigonometric Fourier series. The following two are typical for the results contained in the paper. I. If  $A(m_1) - A(m) = o(m^h)$  uniformly for  $m_1$  in  $(m, m+1)$ ,  $h \geq 0$ ,  $l = [h]$  and if  $\int_0^{\infty} e^{i\lambda x} (i\lambda)^{-l-2} dA(\lambda) \equiv F(x)$  is a function which is the  $(l+2)$ -th integral of an integrable function  $f(x)$  in an interval  $(a, b)$ , finite or not, then, for  $k > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} e^{i\lambda x} (1 - \lambda/\omega)^k dA(\lambda) - \Gamma(k+1)/(\pi\omega^k) \int_0^{\varepsilon} t^{-1-k} C_{1+k}(\omega t) [f(x+t) + f(x-t)] dt \\ = O(\omega^{-1}) + o(\omega^{h-k}), \end{aligned}$$

as  $\omega \rightarrow \infty$ , uniformly in  $x$  on any finite interval contained in  $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ . II. If  $\int_0^{\omega} (1 - \lambda/\omega)^k dA(\lambda) = o(\omega^h)$ ,  $k$  is a non-negative integer,  $l = k + [h]$ ,  $h \geq 0$ ,  $A(\lambda) = 0$  for  $\lambda$  in  $(0, 1)$ , and if  $F(x) \equiv \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^{\omega} (1 - \lambda/\omega)^k e^{i\lambda x} (i\lambda)^{-l-2} dA(\lambda)$  has the same property as in I., then, for  $m \geq k$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} e^{i\lambda x} (1 - \lambda/\omega)^m dA(\lambda) - \Gamma(m+1)/(\pi\omega^m) \int_0^{\varepsilon} t^{-1-m} C_{1+m}(\omega t) [f(x+t) + f(x-t)] dt \\ = o(\omega^{k+h-m}) + o(1), \end{aligned}$$

as  $\omega \rightarrow \infty$ , uniformly in  $x$  on any finite interval contained in  $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ . The integrals are generalized Stieltjes integrals defined by

$$\int_a^b \Phi(\lambda) dA(\lambda) = \Phi(b) A(b) - \varphi(a) A(a) - \int_a^b \varphi'(\lambda) A(\lambda) d\lambda$$

if  $a, b$  are finite and  $\varphi(\lambda)$  has a continuous derivative, while

$$\int_0^{\infty} \varphi(\lambda) dA(\lambda) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} \varphi(\lambda) dA(\lambda).$$

The properties of Young's functions  $C_p(t)$  play prominent role in the discussion.

*J. D. Tamarkin* (Providence, R. I.).

**Tricomi, F.:** Über Doetschs Umkehrformel der Gauss-Transformation und eine neue Umkehrung der Laplace-Transformation. Math. Z. **40**, 720—726 (1936).

G. Doetsch [Z. Physik **49**, 705—730 (1928)] has given

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(mz^2/2) dz \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos z(x-\xi) d\xi$$

as the inverse of the Gauss transform

$$f(x) = \mathfrak{G}^{(m)}[F(\xi)] = (2\pi m)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x - \xi)^2/(2m)] F(\xi) d\xi.$$

For the bilateral Laplace transform the corresponding formulas are

$$\varphi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \Phi(t) dt,$$

$$\Phi(t) = (2\pi^3)^{-1/2} e^{-t^2/2} \int_0^{\infty} e^{u^2/2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} \cos(s+t) u \varphi(s) ds.$$

These formulas are verified under (naturally rather) severe limitations upon the functions. The formulas have the advantage of being real, but do presuppose that  $f(\xi)$  and  $\varphi(s)$  are known for all real values, so the validity is a priori restricted to a certain class of entire functions.

*E. Hille (New Haven, Conn.).*

**Hille, Einar: Notes on linear transformations. I.** Trans. Amer. Math. Soc. **39**, 131—153 (1936).

The author discusses the functional transformation of the type

$$K_{\alpha}[f] \equiv \alpha \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha t) f(x+t) dt.$$

He is concerned particularly with problems of finding solutions of equation  $K_{\alpha}[f] = 0$ , of invariant elements,  $K_{\alpha}[f] = f$ , and of degree of approximation of  $f$  by means of  $K_{\alpha}[f]$  as  $\alpha \rightarrow \infty$ . He shows that these problems admit of a more or less complete solution provided suitable restrictions are imposed on the kernel  $K$  and on function space to which  $f$  belongs. An important role in the discussion is played by the functional equation for the composite kernel  $K(u; \alpha, \beta)$  which originates the transformation  $K_{\alpha}[K_{\beta}[f]]$ . The general theory is illustrated by examples of Weierstrass kernel  $K(u) = \pi^{-1/2} e^{-u^2}$ , Poisson kernel  $K(u) = \pi^{-1} (1 + u^2)^{-1}$ , Picard kernel  $K(u) = \frac{1}{2} e^{-|u|}$ , and Dirichlet kernel  $K(u) = (\pi u)^{-1} \sin u$ . If parameters are suitably changed the classes of Poisson and Weierstrass are characterized by the same functional equation  $D_{\lambda}[F_{\mu}[f]] = F_{\lambda+\mu}[f]$ , that of Picard by  $(\alpha^2 - \beta^2) \Pi_{\alpha}[\Pi_{\beta}[f]] = \alpha^2 \Pi_{\beta}[f] - \beta^2 \Pi_{\alpha}[f]$ , and that of Dirichlet by  $D_{\alpha}[D_{\beta}[f]] = D_{\gamma}[f]$ ,  $\gamma = \min(\alpha, \beta)$ . It is shown that the family of transformations  $\{D_{\alpha}[f]\}$  which coincide with the Dirichlet kernel transformations for  $\alpha \geq 0$  and  $= 0$  for  $\alpha < 0$  represents the family of projections associated with the self-adjoint transformation of a Hilbert space as defined by  $H(f) = \tilde{f}$  = conjugate of the derivative of  $f$ .

*J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).*

**Koizumi, S.: Notes on the asymptotic evaluation of operational expressions.** Philos. Mag., VII. s. **21**, 265—274 (1936).

This paper gives sufficient conditions for the validity of the Heaviside asymptotic expansion rule. Let  $F(p)$  be a function of the complex variable  $p$  whose only singularities in the finite part of the plane are poles and branch points and which is regular in the half-plane  $R(p) > \beta > 0$  [ $F(p)$  being made one-valued by suitable cuts]. Then if  $\frac{F(p)}{p} = O(p^{-r})$ ,  $r > 0$ , as  $|p| \rightarrow \infty$ , the development of  $\frac{F(p)}{p}$  about the branch point (or pole) whose real part is greatest furnishes an asymptotic development (in the sense

of Poincaré) for the associated function  $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} e^{tp} \frac{F(p)}{p} dp$ . If  $\sum A_n (p-b)^{\frac{n}{r}}$ ,

$r > 0$ , is the development of  $\frac{F(p)}{p}$  about the branch point, or pole,  $b$  with greatest real part the asymptotic development of  $f(t)$  is  $e^{bt} \sum \frac{A_n}{\Gamma(-\frac{n}{r})} t^{-(\frac{n}{r}+1)}$ . If there are

several branch points or poles having the same (greatest) real part the developments corresponding to each must be combined.

*Murnaghan (Baltimore).*

**Reihen:**

**Nersessian, Catherine:** Sur la multiplicité du développement trigonométrique. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 195—197 (1936).

$E$  is a set of multiplicity of trigonometric expansions if there exists a trigonometric series with non-zero coefficients which converges to zero outside of  $E$ . The author states that if the points of quasy-density of a perfect set  $P$  are everywhere dense in  $P$ , then every residual set  $R$  of  $P$  is a set of multiplicity. Here  $\xi$  is a point of quasy-density if the ratio  $l/d$  of the length  $l$  of an interval  $\delta$  contiguous to  $P$  to the distance  $d$  of  $\delta$  from  $\xi$  tends to zero when  $\delta$  tends to  $\xi$ . If  $\text{meas.}(P) > 0$ , every set  $E$ , measurable  $B$  and of the second category in  $P$ , is a set of multiplicity. Various reflections and hypotheses are added.

*E. Hille* (New Haven, Conn.).

**Burkill, J. C.:** The expression of trigonometrical series in Fourier form. J. London Math. Soc. **11**, 43—48 (1936).

The author departs from some results of S. Verblunsky (this Zbl. **1**, 272; **8**, 310; and **10**, 19). The first part of the note is devoted to trigonometrical series with finite

upper and lower sums, so that  $\lim_n \left| \sum_1^n c_m e^{miz} \right| < \infty$  except in an enumerable set. Here

$c_m = a_m - ib_m$ ,  $A_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ,  $B_n(x) = b_n \cos nx - a_n \sin nx$ . Suppose further that the integrated series  $\sum_1^\infty c_m e^{miz}/mi$  converges for all  $x$  to  $F(x) - iG(x)$ .

Then the Cesàro derivatives of  $F(x)$  and  $G(x)$  exist almost everywhere, and the coefficients  $a_n, b_n$  are expressible by the Euler-Fourier formulas in terms of these derivatives, where the integrals are of the Cesàro-Perron type of order one. Under the

same hypotheses the series  $\sum_1^\infty c_m e^{miz}$  is Poisson summable to the derivative of  $F(x) - iG(x)$  for almost all  $x$ . In the second part of the paper the author is concerned with trigonometrical series whose coefficients are  $o(n^2)$ . Verblunsky had handled the case  $o(n)$  successfully with the aid of the Denjoy integral, but for the case  $o(n^2)$  his results did not seem to have final character. Replacing the integral  $(D)$  by the integral  $(CP)$ , the

author obtains more satisfactory results. He assumes that the Poisson sums of  $\sum_1^\infty B_n(x)/n$  are finite and integrable  $(D)$ . Further, if  $\bar{R}(x)$  and  $\underline{R}(x)$  are the upper and lower Poisson-Riemann sums of order 2 of  $\sum_1^\infty A_n(x)$ , then  $\bar{R}(x) \geq \varphi(x) \geq \underline{R}(x)$ , where  $\varphi(x)$

is  $CP$ -integrable, and concludes that  $\sum_1^\infty A_n(x)$  is the  $CP$ -Fourier series of  $\varphi(x)$ .

*E. Hille* (New Haven, Conn.).

**Bosanquet, L. S.:** Note on the absolute summability  $(C)$  of a Fourier series. J. London Math. Soc. **11**, 11—15 (1936).

See Zbl. **8**, 61 for preliminary announcement. Let

$$\varphi(t) = \varphi_0(t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)],$$

$$\varphi_\alpha(t) = \alpha \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} \varphi(tu) du, \quad \alpha > 0.$$

A series is summable  $|C, \alpha|$ ,  $\alpha \geq 0$ , if the Cesàro means of order  $\alpha$  of the partial sums form a sequence of bounded variation. I. If  $\varphi(t)$  is of bounded variation in  $(0, \pi)$  then the Fourier series of  $f(t)$  is summable  $|C, \delta|$  at  $t = x$  for  $\delta > 0$ . II. If the Fourier series is absolutely convergent at  $t = x$ , then  $\varphi_{1+\delta}(t)$  is of bounded variation in  $(0, \pi)$  for  $\delta > 0$ . Both theorems become false for  $\delta = 0$  as is shown by suitable examples.

*E. Hille* (New Haven, Conn.).

**Rutledge, George, and R. D. Douglass:** The range of de la Vallée Poussin summation. *J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol.* **14**, 191—194 (1935).

In a paper in *Amer. Math. Monthly* **43**, 27—32 (1936) (see the following rew.) the authors considered an entire function  $Q(x) = F(x, -x, 1, -1)$  which is associated both with Stirling's interpolation series and de la Vallée Poussin summability. They now show that if a series is (VP.) summable its terms are  $o[Q(n)] = o[n^{-1/2}(3+2\sqrt{2})^n]$ , and they quote a (VP.) summable series whose terms are  $O[n^{-1/2}Q(n)]$ . (It is easy to complete this result by proving that  $o[Q(n)]$  is the best estimate both for the terms and for the partial sums, and that there exist (VP.) summable series whose terms or partial sums are  $\Omega[\varepsilon(n)Q(n)]$  for every  $\varepsilon(n) \downarrow 0$ .) *E. Hille (New Haven).*

**Rutledge, George, and R. D. Douglass:** Integral functions associated with certain binomial coefficient sums. *Amer. Math. Monthly* **43**, 27—32 (1936).

Compare the prec. rew. and *Amer. Math. Monthly* **41**, 29—36 (1934). The authors are concerned with the entire (= integral) functions  $Q(x) = F(x, -x, 1, -1)$  and  $M(x) = xF(1+x, 1-x, 2, -1)$  which are connected with Legendre functions, the Stirling interpolation series, and de la Vallée Poussin summability. The  $M(n)$  and  $Q(n)$  are positive integers, and  $M(n), Q(n)$  divided by  $n^{-1/2}(3+2\sqrt{2})^n$  tend to finite limits. The (VP.) transform of the series  $\sum_1^\infty (-1)^{n-1}Q(n)$  is  $\sum_1^\infty (-1)^{n-1}$ , so the series is merely bounded (VP.). *E. Hille (New Haven, Conn.).*

**Kuttner, B.:** Some relations between different kinds of Riemann summability. *Proc. London Math. Soc., II. s.* **40**, 524—540 (1936).

A côté du procédé de sommation  $(R, p)$  défini par

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{gén}(R, p) - \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \left[ \frac{\sin nh}{nh} \right]^p \quad (E(p) = p > 0)$$

l'auteur considère aussi le procédé  $(R', p)$  selon lequel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{gén}(R', p) - s_n = \frac{1}{A_p} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ h \cdot \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cdot \left[ \frac{\sin nh}{nh} \right]^p \right\},$$

la constante  $A_p$  étant choisie de manière à avoir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{gén}(R', p) - 1 = 1$ . Il prouve que la sommabilité  $(R, 2)$  entraîne celle  $(R', p)$  pour  $p = E(p) > 2$  et inversement: la sommabilité  $(R', 2)$  entraîne celle  $(R, p)$  pour  $p > 2$ . Ce sont là les meilleurs résultats possibles pour  $p = E(p)$  car il est bien connu que  $(R, 2)$  n'entraîne point  $(R', 2)$  et inversement. Il reste à étudier les cas où  $p$  n'est pas entier. Pour  $p = 2$  et en utilisant la notion plus large de sommabilité  $(R, 2)$  ou  $(R', 2)$  „approchée“ [ $h \rightarrow 0$  restant à l'intérieur d'un ensemble  $(E)$  de points de densité égale à 1 à l'origine,  $(E)$  étant arbitraire mais fixe dans chaque cas particulier], l'auteur prouve que  $(R, 2)$  [ou bien  $(R', 2)$ ] entraîne la sommabilité approchée  $(R', 2)$  [ou bien  $(R, 2)$ ] et il montre que l'extension de ce résultat à  $p = 3$  est impossible. *E. Kogbetliantz (Téhéran).*

**Mears, Florence M.:** Some multiplication theorems for the Nörlund mean. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 875—880 (1935).

La note contient trois théorèmes dont le premier traite la sommabilité de la série produit d'une série sommable absolument par une série sommable non-absolument et le deuxième — celle de la série produit des deux séries sommables non absolument. Dans les deux cas les moyennes sommant la série produit sont définies à partir des moyennes employées lors de la sommation des séries facteurs d'une manière appropriée. *E. Kogbetliantz (Téhéran).*

### Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Pfluger, A.: Über eine Interpretation gewisser Konvergenz- und Fortsetzungseigenschaften Dirichletscher Reihen. *Comment. math. helv.* 8, 89—129 (1935).

In this paper the results of Pólya in *Math. Z.* 29, 549—640 (1929) on the relations between the rate of growth of an entire function of exponential type and the singularities of its Borel transform are extended to a class of irregular power series  $g(z) = \sum_1^\infty a_n z^{-\lambda_n}$ ,  $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ .  $g(z)$  is quasi-regular at  $z = \infty$  if it is regular on the Riemann surface of  $\log z$  für  $|z| > V$ , and bounded in every finite sector. The branch surface (Windungsfläche)  $\mathfrak{B}$  of  $g(z)$  is the union of all half-planes  $\Re(z e^{-i\varphi}) > d$  in which  $g(z)$  is holomorphic. The Stützfunktion of  $\mathfrak{B}$ ,  $k(\varphi) = \inf d$  for fixed  $\varphi$ , satisfies the usual inequalities. All boundary points of  $\mathfrak{B}$  which are not interior to a rectilinear segment of the boundary are singular points of  $g(z)$ .  $G(z)$  is quasi-entire if it is regular and single-valued on the Riemann surface  $L$  of  $\log z$ , and bounded for  $|z| < V$ ,  $t_1 < \arg z < t_2$ , for all finite  $V$ ,  $t_1$  and  $t_2$ .  $G(z)$  is of finite sectorial order if  $G(z) \exp(-|z|^\rho)$  is sectorially bounded on  $L$ ,  $\rho = \inf \nu$  being the sectorial order.  $G(z)$  is of sectorial type  $\chi$ , if  $\chi = \inf A$ , and  $G(z) \exp(-A|z|^\rho)$  is sectorially bounded. The indicator is defined as  $h(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log |G(r e^{i\varphi})|$ , and  $\chi = \sup h(\varphi)$ . In case  $M(r) = \sup |G(r e^{i\varphi})|$  exists,  $\log M(r)$  is continuous, increasing and convex in  $\log r$ . Further,  $\beta = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho} \log M(r)$  is called the ordinary type,  $\chi \leq \beta$  and  $<$  can hold. In case  $\rho = 1$ ,  $\chi$  finite (exponential type) the author associates with the quasi-entire function  $G(z)$  a Borel transform  $g(z)$  which is quasi-regular at infinity,  $z g(z)$  being sectorially bounded for large  $z$ . Conversely, with such a function  $g(z)$  is associated a Borel adjoint  $G(z)$  which is a quasi-entire function. These functions are expressed in terms of each other by a suitable generalization of the usual contour integrals. The properties of  $g(z)$  and  $G(z)$  show considerable dualism. Thus, the radius of holomorphy of  $g(z)$  equals the sectorial type of  $G(z)$ , and the radius of boundedness of  $z g(z)$  equals the ordinary type of  $G(z)$ , and vice versa. Further,  $h(\varphi) = k(-\varphi)$ . There is also a dualism between the radii of convergence (ordinary, uniform, and absolute) of  $g(z)$  and certain convergence types of  $G(z)$  which also extends to over-convergence. As an application, the author gives a new class Dirichlet series for which the abscissa of boundedness coincides with the abscissa of absolute convergence. E. Hille (New Haven, Conn.).

Szász, Otto: Converse theorems of summability for Dirichlet's series. *Trans. Amer. Math. Soc.* 39, 117—130 (1936).

The author gives a number of Tauberian theorems for Dirichlet series of which the following are fair samples. Let  $F(t) = \sum_1^\infty c_\nu e^{-\lambda_\nu t}$  converge for  $t > 0$ , and let  $F(t) \rightarrow s$  as  $t \rightarrow +0$ . Then  $\sum_1^n c_\nu \rightarrow s$  if in addition one of the following conditions holds:

$$\sum_1^n |c_\nu|^p \lambda_\nu^p (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})^{1-p} = O(\lambda_n), \quad p > 1, \quad (A)$$

$$\sum_1^n (|c_\nu| - c_\nu)^p \lambda_\nu^p (\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1})^{1-p} = O(\lambda_n), \quad p > 1, \quad (B)$$

together with  $\lim c_\nu \geq 0$  or  $\lambda_{n+1}/\lambda_n \rightarrow 1$ ;

$$\sum_1^\infty \left( \frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \lambda_{\nu-1}} \right)^\rho (|c_\nu| - c_\nu)^{\rho+1} < \infty, \quad \rho > 0, \quad (C)$$

$$\sum_1^n c_\nu \lambda_\nu \geq -K \lambda_n \quad (D)$$

together with

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\lambda_n \leq x \leq (1+\delta)\lambda_n} \left| \sum_{\lambda_n \leq \lambda_\nu < x} c_\nu \right| = \psi(\delta) \rightarrow 0 \text{ as } \delta \rightarrow 0.$$

E. Hille (New Haven, Conn.).

**Avakian, Arra Steve:** Almost periodic functions and the vibrating membrane. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 14, 350—378 (1935).

Untersuchung der Schwingungen einer kreisförmigen Membran; die Differentialgleichung in Polarkoordinaten lautet

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r T_1(r, \vartheta) \frac{\partial z}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ T_2(r, \vartheta) \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \right] = \mu(r, \vartheta) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (*)$$

Es wird vorausgesetzt, daß die totale Energie in bezug auf  $z$  und analoge Ausdrücke für  $\frac{\partial z}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial t^n}$  (höhere Energien) endlich sind. Die Lösungen ergeben sich als fast-periodische Funktionen von  $t$ , deren Wertevorrat dem Raume der im Kreise  $K$  summierbaren Funktionen angehört,  $\varrho(t, \varphi) = \iint_K (t - \varphi)^2 dx dy$  (Muckenhouptsche Funktionen). Im Falle der Kartesischen Koordinaten erweist sich die Gleichung (\*) als ein Spezialfall der von S. Bochner untersuchten (dies. Zbl. 9, 163). W. Stepanoff.

**Cameron, Robert H.:** Almost periodic properties of bounded solutions of linear differential equations with almost periodic coefficients. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. 15, 73—81 (1936).

Soit

$$\frac{d\xi_\mu(t)}{dt} = \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\mu,\nu}(t) \xi_\nu(t) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

un système différentiel linéaire dont les coefficients  $\alpha_{\mu,\nu}$  sont des fonctions p. p. de la variable réelle  $t$ , soit  $M$  le module commun des  $\alpha_{\mu,\nu}$ ; si l'intégrale:

$$\int_0^t R[\alpha_{11}(\tau) + \dots + \alpha_{n,n}(\tau)] d\tau$$

est bornée quel que soit  $t$  et si, de plus, toutes les solutions du système sont bornées, alors il existe au moins un système complet de solutions  $\{\xi_\mu^{(\nu)}(t)\}$  ( $\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$ ) tel que la fonction:

$$\sum_{\sigma=1}^n \xi_\mu^{(\sigma)}(t) \overline{\xi_\nu^{(\sigma)}(t + \tau)}$$

est p. p. en  $t$ , quelque soit  $\tau$  et quels que soient  $\mu$  et  $\nu$  et dont le module est contenu dans  $M$ . En particulier

$$\sum_{\sigma=1}^n |\xi_\mu^{(\sigma)}(t)|^2$$

est p. p. quel que soit  $\mu$ . — Ce résultat, dont un cas particulier avait été traité par le  $Rf$ , est obtenu par la considération du groupe des matrices de translation de la matrice  $\|\xi_\mu^{(\nu)}\| = X(t)$ . Soit  $\{h_i\}$  une suite infinie de nombres réels tels que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda h_i \equiv (\text{mod } 2\pi); \text{ quel que soit } \lambda \text{ dans } M$$

on appelle matrice de translation de  $X(t)$  par rapport à  $\{h_i\}$ , la matrice:

$$[X(0)]^{-1} \left[ \lim_{i \rightarrow \infty} X(h_i) \right].$$

Ces matrices forment un groupe par rapport à la multiplication. — Si ce groupe est abélien, on peut, de plus, déterminer un système complet de solutions tel que chaque fonction de ce système soit de la forme:

$$f(t) e^{i \int \frac{g(t)}{|f(t)|^2} dt}$$

où  $f$  et  $g$  sont des fonctions p. p. réelles, la première positive.

J. Favard.

### Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

**Marchaud, André:** Sur les champs continus de demi-cônes convexes et leurs intégrales. Compositio Math. 3, 89—127 (1936).

Vgl. das Referat über die C. R.-Voranzeige, dies. Zbl. 10, 258.

W. Feller.

**Hirschfeld, H. O.:** A generalization of Picard's method of successive approximation. Proc. Cambridge Philos. Soc. **32**, 86—95 (1936).

L'équation  $\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y)$  avec les conditions aux limites  $y(0) = A$ ,  $y(a) = B$ , a été résolue par Picard pour un intervalle  $(0, a)$  suffisamment petit; si on ramène le problème à une équation intégrale non linéaire, la solution est donnée par Hammerstein [Acta math. **54** (1930)] sous la condition (A)  $F(x, y) \equiv \int_0^y f(x, t) dt \geq -c_1 y^2 - c_2$ ,  $c_2 > 0$ ,  $0 \leq 2c_1 < \frac{\pi^2}{a^2}$ ; en particulier si (A')  $f_y(x, y) \geq -2c_1$ . L'aut. applique à ce problème la méthode des approximations successives en subdivisant  $(0, a)$  en  $n$  intervalles partiels suffisamment petits, et il ajuste les solutions partielles en observant que le problème considéré est celui du minimum de  $I(y) \equiv \int_0^a \{y'^2 + 2F(x, y)\} dx$ .

Dans le cas (A') a lieu l'unicité. En se bornant à la première approximation on retrouve la méthode d'approximation à l'aide des équations aux différences. W. Stepanoff.

**Vass, John I.:** A class of boundary problems of highly irregular type. Duke math. J. **2**, 151—165 (1936).

Es werden hinreichende Bedingungen aufgestellt für die Entwickelbarkeit einer Funktion nach Eigenfunktionen der folgenden in einem bestimmten Sinne „irregulären“ Randwertaufgabe: Die Differentialgleichung ist  $u''(x) - 2\rho(\cos x)u'(x) + \rho^2 u(x) = 0$ , wo  $\rho$  ein Parameter,  $c$  eine Konstante und  $c = p\pi/q$  mit  $0 < 2p < q$ ;  $p, q$  ganze Zahlen. Das Intervall sei  $0 \leq x \leq 1$ . Randbedingungen sind: Entweder  $R_I$ :  $u'(0) = 0$ ,  $W_2(u) = a_{21}u'(0) + a_{20}u(0) + b_{21}u'(1) + b_{20}u(1) = 0$ . Oder  $R_{II}$ :  $u(0) = 0$ ,  $W_2(u) = 0$ . Verf. gelangt zu folgendem Ergebnis: Dafür, daß  $f(x)$  sich nach den Eigenfunktionen der Randwertaufgabe im offenen Intervall  $(0, 1)$  in eine gleichmäßig konvergente Reihe entwickeln läßt, ist folgendes hinreichend:  $f(x)$  ist integrierbar und von beschränkter Variation in  $(0, 1)$ , ferner analytisch im Einheitskreis der komplexen  $x$ -Ebene sowie darstellbar in der Form  $C_1 + C_2x + x^2\Phi_1(x^k)$  bzw.  $C_1 + x\Phi_2(x^k)$ , je nachdem  $R_I$  oder  $R_{II}$  vorliegt. Dabei bedeuten  $C_1, C_2$  Konstante und  $k$  die kleinste ganze Zahl, für welche  $e^{kic} = 1$ . Der Beweis für die Reihenentwicklung wird, wie üblich, durch Abschätzung der Greenschen Funktion bzw. gewisser mit ihr in der komplexen  $\rho$ -Ebene gebildeter Kurvenintegrale geliefert. Haupt (Erlangen).

**Biernacki, M.:** Sur les valeurs asymptotiques des intégrales des équations différentielles. Ann. Soc. Polon. math. **13**, 93—99 (1935).

Pour une équation différentielle  $y' = f(x, y)$ ,  $f$  étant continue dans le demi-plan  $x > a$ , (\*)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) = \varphi(y)$  existant uniformément pour  $-\infty < y < +\infty$ ,  $\lim_{y \rightarrow -\infty} \varphi(y) > 0$ ,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(y) < 0$ , — toute valeur limite  $y_0$  pour  $x \rightarrow \infty$  d'une intégrale est finie et telle que  $\varphi(y_0) = 0$ . La même conclusion a lieu pour une intégrale finie, si  $c < y_0 < d$  et si (\*) existe uniformément dans tout  $\langle c, d \rangle \subset (c, d)$ . Si  $\varphi(y)$  passe par un zéro  $y_0$  en décroissant, il existe une infinité d'intégrales tendant vers  $y_0$ ; il en existe une au moins, si  $\varphi(y)$  croît au point  $y_0$ . W. Stepanoff (Moskau).

**Kamke, E.:** Über die partielle Differentialgleichung  $f(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} = h(x, y)$ . Math. Z. **41**, 56—66 (1936).

Die Funktionen  $f, g, h$  sind in einem Gebiete  $\mathfrak{G}$  stetig differentiierbar,  $f^2 + g^2 > 0$ . Dann existiert in jedem einfach zusammenhängenden Gebiete  $\mathfrak{g}, \bar{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{G}$ ,  $f, g, h$  in  $\mathfrak{g}$  beschränkt, ein Integral  $J(x, y)$  der im Titel geschriebenen Differentialgleichung. Für  $h \equiv 0$  existiert  $J(x, y)$  mit  $J_x^2 + J_y^2 > 0$ . W. Stepanoff (Moskau).

**Görtler, Heinrich:** Asymptotische Eigenwertgesetze bei Differentialgleichungen vierter Ordnung. Mitt. math. Semin. Gießen H. **26**, 1—62 (1936).

Für Eigenwertprobleme, die aus einem selbstadjungierten Differentialausdruck

vierter Ordnung in einer und zwei Veränderlichen (in zwei Veränderlichen sei der Differentialausdruck von der Form  $A\Delta\Delta u$  + Glieder niedrigerer Ordnung) entspringen, wird nach Methoden von Courant die asymptotische Verteilung der Eigenwerte angegeben.

*Rellich* (Marburg, Lahn).

**Pfeiffer, Georg:** Die Konstruktion des allgemeinen Operators des Involutionsystems von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 14, 327—341 (1936).

The paper determines all linear homogeneous differential operators  $Y = \eta^i \partial/\partial x^i$  admitted (Lie, Transformationsgruppen 3, 138—143) by a complete system  $X_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, r$ ). The first solution is obtained by assuming  $X_\alpha$  in solved form and treating directly the differential equations on the unknown coefficients of  $Y$ . The second solution (pp. 340—341) is much more to the point. It amounts to reducing  $X_\alpha$  to the form  $\partial/\partial x^\alpha$  by a transformation  $T$ , then finding the symbols  $Y$  admitted by  $\partial/\partial x^\alpha$  and finally transforming them by  $T^{-1}$ . This, of course, requires a knowledge of the solutions of  $X_\alpha f = 0$ . Since the first method also involves these solutions, there seems no reason for including it.

*J. M. Thomas* (Durham).

**Pfeiffer, G.:** Sur la transformation de A. Mayer dans la méthode de Jacobi-Mayer. *Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math.* 1, 1—4 u. franz. Zusammenfassung 4 (1935) [Ukrainisch].

**Cerf, G.:** Sur des transformations d'équations aux dérivées partielles du second ordre à  $n$  variables indépendantes obtenues par une propriété d'invariance du groupe des transformations de contact. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 15, 1—10 (1936).

A un élément du premier ordre  $x_1, x_2, x_3, z, p_1, p_2, p_3$  faisons correspondre une hypersurface à trois dimensions (1)  $Z = F(X_1, X_2, X_3; x, z, p)$ . L'élimination de  $X_1, X_2, X_3$  entre les relations (2)  $F_i = \partial F/\partial x_i + p_i \partial F/\partial z + p_{1i} \partial F/\partial p_1 + p_{2i} \partial F/\partial p_2 + p_{3i} \partial F/\partial p_3 = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) et (3)  $D(F_1, F_2, F_3)/D(X_1, X_2, X_3) = 0$  conduit, en général, à une relation entre les  $x, z, p$ . Pour  $p_1 = \partial z/\partial x_1, \dots; p_{11} = \partial^2 z/\partial x_1^2, \dots$ , cette relation devient une équation (A) du second ordre pour la fonction inconnue  $z$ . Dans certaines conditions les  $X_1, X_2, X_3$  déterminés par les relations (2) et (3) sont des fonctions indépendantes de  $x_1, x_2, x_3$  lorsque  $z$  décrit une intégrale de l'équation (A). La transformation correspondante  $x \rightarrow X$  conduit alors de l'intégrale  $z$  à une fonction  $Z(X_1, X_2, X_3)$  (1) et on démontre que cette fonction vérifie une équation (B) du second ordre. Il en est ainsi dans le cas où les  $x, z, p$  figurent dans  $F$  par l'intermédiaire de seulement 5 fonctions  $\varphi_j(x, z, p)$  ( $j = 1, \dots, 5$ ) et ces fonctions  $\varphi_j$  constituent un groupe de fonctions.

*O. Borůvka* (Brno).

**Rellich, Franz:** Zur Konstruktion der Grundlösung für eine gemischte Randwert-aufgabe einer partiellen Differentialgleichung höherer Ordnung. *Math. Ann.* 112, 490 bis 492 (1936).

Es handelt sich um die Gleichung

$$u_{xx} - au = f(x, t), \quad (a = \text{konst.}).$$

Gesucht wird eine Lösung  $u(x, t)$  im Streifen  $0 \leq x \leq 1, t \geq 0$ , mit vorgegebenen Randwerten. Durch eine einfache Reihenentwicklung wird die Grundlösung des Problems angegeben.

*G. Cimmino* (Napoli).

**Winants, Marcel:** [Chacun des deux problèmes  $(a_0, \text{III}, 3')$  et  $(a_0, \text{III}, 2')$  peut être résolu par le moyen d'une équation intégrale ayant un nombre infini de termes. *Bull. Acad. Roy. Belg.*, V. s. 22, 8—25 (1936).

Man sucht nach einer Lösung der Gleichung

$$z_{xy} - z_{yy} = f(x, y, z)$$

in der Nähe der Koordinatenursprung mit vorgegebenen Werten von  $z$  für  $y = 0$ ,  $x = 0$  und  $x = y$ , oder vorgegebenen Werten von  $z$  für  $y = 0$ , von  $z$  und  $z_x$  für  $x = y$ . Existenz und Eindeutigkeit der Lösung beweist man durch die Methode der sukzessiven Approximationen, nachdem die Differentialgleichung mit den Nebenbedin-

gungen in eine Gleichung der Form  $z = If(x, y, z)$  transformiert worden ist, wobei  $I$  einen gewissen Linearoperator bezeichnet. G. Cimmino (Napoli).

Gay: Sur l'équation de M. P. Humbert. Bull. Soc. Math. France **63**, 197—209 (1935).

Cette équation est

$$\partial^3 u / \partial x^3 + \partial^3 u / \partial y^3 + \partial^3 u / \partial z^3 - 3 \partial^3 u / (\partial x \partial y \partial z) = 0,$$

mais, par un changement d'axes, M<sup>r</sup> Liénard (Société mathématique de France, Comptes rendus des séances de l'année 1933, pages 29 à 32) la ramena à la forme exclusivement employée dans le travail actuel,

$$\partial^3 u / (\partial x^2 \partial z) + \partial^3 u / (\partial y^2 \partial z) = \partial \Delta u / \partial z = 0.$$

L'aut. étudie les questions de trouver des solutions  $u$  dans un domaine borné, connaissant soit les valeurs de  $u$  sur la frontière, soit les dérivées de  $u$  suivant les normales aux courbes de niveau ( $Oz$  étant vertical), soit les dérivées de  $u$  suivant les normales à la frontière. Le premier problème reçoit une solution explicite, où figurent une fonction de Green et une fonction arbitraire (à signaler une confusion qui, dans un cas particulier étudié au paragraphe 5, fait que l'aut. affirme faussement la constance d'une certaine fonction). Le deuxième problème peut être traité d'une façon analogue, brièvement indiquée. Pour le troisième problème, qui est plus compliqué, l'aut. indique sommairement un mécanisme d'approximations successives, soumis à de nouvelles hypothèses relatives à la frontière; pour ce problème, l'aut. étudie à part le cas des surfaces de révolution.

Georges Giraud (Bonny-sur-Loire).

Selberg, Henrik L.: Ein Existenzsatz der Potentialtheorie und seine Anwendung. Avh. Norske Vid. Akad. Oslo 1935, 1—10 (Nr 6).

Der bekannte Satz über die Existenz einer harmonischen Funktion  $u(z, \alpha, \beta)$  mit einem positiven und einem negativen logarithmischen Pol in  $\alpha$  bzw.  $\beta$  auf einer beliebigen Riemannschen Fläche wird bewiesen und zum Beweise eines Satzes von Myrberg (dies. Zbl. **7**, 163) über die Greensche Funktion auf Riemannschen Flächen benutzt.

L. Ahlfors (Cambridge, Mass.).

Garrett, George A.: Necessary and sufficient conditions for potentials of single and double layers. Amer. J. Math. **58**, 95—129 (1936).

Let  $S$  be a simple closed surface having a tangent plane at each of its points, and such that, for any two points  $P, Q$  of  $S$ , the interior normals  $n_P, n_Q$  to  $S$  satisfy (1)  $|\angle n_P, n_Q| < K PQ$ , where  $K$  is independent of  $P, Q$ . Let  $\nu(e)$  be a completely additive function of point sets  $e$  (meas.  $B$ ) on  $S$ . The author studies potentials representable in the forms

$$\text{I} \quad U(M) = \int_S \frac{\cos(MP, n_P)}{MP^2} d\nu(e_P), \quad \text{II} \quad V(M) = \int_S \frac{d\nu(e_P)}{MP}.$$

The following conditions are in particular shown to be equivalent. (a) For  $M$  in the interior  $T$  of  $S$   $U(M)$  can be written in the form I; (b) For  $M$  in  $T$   $U(M)$  can be written as the difference of two not negative functions each harmonic in  $T$ ; (c)  $U(M)$  is harmonic in  $T$  and  $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{S_p} |U(M)| dS_p < \infty$  for a sequence of surfaces  $\{S_p\}$  each lying in  $T$ , each

having the properties of  $S$ , and such that (i)  $[\max \text{ for } P \text{ on } S \text{ of } \delta(P, S_p)] \rightarrow 0$  as  $p \rightarrow \infty$ , where  $\delta(P, S_p)$  is the normal distance from  $P$  to  $S_p$ , and (ii) an inequality of the type (1) holds for  $P, Q$  arbitrary on  $S + S_1 + S_2 + \dots$ . Similar results are given for the region exterior to  $S$ , and for representation in the form II. The proofs rest in part on Evans' and Miles' (this Zbl. **1**, 277) analysis of the integral equations associated with the generalized Dirichlet and Neumann problems for surfaces of the same type as  $S$ . That (a), (b) and (c) are equivalent in the case of spheres was proved by Bray and Evans [Amer. J. Math. **49**, 153—180 (1927)]. That (b) and (c) are equivalent in the case that  $S$  has bounded curvature and the  $S_p$  are normal surfaces approximating  $S$  was proved by de la Vallée Poussin (this Zbl. **6**, 308). Gergen.

**Lampariello, G.:** Comportamento all'infinito di usuali funzioni del posto. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 22, 557—564 (1935).

Es sei  $w$  ein wirbelfreies Vektorfeld derart, daß in jeder festen Richtung  $r^m w$  ( $m > 1$ ) für  $r \rightarrow \infty$  gegen einen nicht identisch verschwindenden Vektor  $u$  strebt; dann wird bewiesen, daß es unter den Potentialen von  $w$  eins gibt, das im Unendlichen von der Größenordnung  $m - 1$  verschwindet. — Ein ähnlicher Satz wird auch für skalare Funktionen bewiesen.

W. Feller (Stockholm).

**Sokolnikoff, I. S., and E. S. Sokolnikoff:** The problem of Dirichlet for an ellipsoid. Terrestr. Magnet. Atmosph. Electr. 40, 433—442 (1935).

This is the paper the resumé of which was reviewed in this Zbl. 13, 113. In addition to the material mentioned in the review this paper contains an outline of a scheme of successive approximations for the solution of the system of infinitely many equations in infinitely many unknowns cited. No attempt is made to prove that the approximations yield a solution. The paper also contains formulas for the calculation of the capacity of an ellipsoid of revolution in the presence of grounded conducting sheets of infinite extent.

J. J. Gergen (Rochester).

**Minetti, Silvio:** Sul movimento di un corpo solido intorno ad un punto fisso e sull'integrazione con una sola quadratura del movimento di precessione regolare. Mem. Accad. Ital. 6, 1335—1353 (1935).

The author's general theory of the geometry of function spaces [Mem. Accad. Ital. 4 (1933); this Zbl. 8, 165] is applied to discover a case of integrability by a single quadrature of the general Riccati differential equation. This result is then used in obtaining the explicit integration of the differential equations of precession.

D. C. Lewis (Ithaca, N. Y., U. S. A.).

**Bakaliajev, A. S.:** Le théorème de l'unicité pour quelques problèmes de limites dans la théorie de l'élasticité. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 1, 55—58 (1936).

Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung des in einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 13, 165) gestellten Problems. Die gesuchten Funktionen müssen — außer den Differentialgleichungen und Randbedingungen zu genügen — im Unendlichen in geeigneter Weise verschwinden und die „verallgemeinerte Anstrahlungsbedingung“ erfüllen. Die verwendeten Hilfsmittel sind dieselben wie in der genannten Note des Verf.

Th. Pöschl (Karlsruhe).

**Germa, R.-H.-J.:** Sur l'intégrale d'une équation intégrale-différentielle, considérée comme fonction des valeurs initiales  $x_0$  et  $y_0$ . Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 4, 293—298, 325—329 (1935); 5, 2—5 (1936).

**Germa, R. H. J.:** Sur les solutions des systèmes d'équations intégrale-différentielles normales considérées comme fonctions des valeurs initiales  $x_0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_p^0$ . I. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 4, 329—336 (1935); 5, 5—11 (1936).

Die Lösung  $y(x)$  der Integro-Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y; u_1, u_2, \dots, u_p), \quad u_r = \int_{x_0}^x f_r[x, s; y(s)] ds,$$

mit der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_0$ , unter passenden Voraussetzungen für  $F, f_1, f_2, \dots, f_p$ , ist eine stetig differenzierbare Funktion von  $x_0, y_0$ ; denn die Ableitungen der sukzessiven Approximationen nach  $x_0$  und  $y_0$  konvergieren gleichmäßig. Dieser Satz läßt sich auf den Fall eines Systems verallgemeinern. G. Cimmino.

### Integralgleichungen, Funktionalanalysis und Verwandtes:

**Sternberg, W.:** Équations intégrales étendues. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 382—384 (1936).

The integral equation considered is the mixed integral equation:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + p(x) \varphi(c) + f(x)$$

$c$  lying between  $a$  and  $b$ . The usual results concerning solutions of such an equation are given, most of which have obviously been obtained previously, e. g. by Hurwitz [Trans. Amer. Math. Soc. **16**, 121—133 (1915)] and Moore [Bull. Amer. Math. Soc. **18**, 358 (1912)]. Any novelty would result from the presence of the parameter  $\lambda$  on the integral term and not on the mixed term  $p(x) \varphi(c)$  or the utilization of two parameters, one for each of these terms. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

**Randels, W. C.:** On Volterra-Stieltjes integral equations. Duke math. J. **1**, 538 bis 542 (1935).

The author considers integral equations of the form

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^x f(y) d_y K(x, y).$$

Here the integral is of the Young-Stieltjes type over the open interval  $(0, x)$ .  $g(x)$  is bounded and meas. (B),  $K(x, y)$  is meas. (B) in  $x$ , and there is a bounded,  $\uparrow$  function  $V(y)$ ,  $V(0) = 0$ , such that  $|K(x, y_1) - K(x, y_2)| \leq |V(y_1) - V(y_2)|$ . The author shows the existence of a unique solution given by a suitable extension of the usual resolvent formula. The special case in which  $K(x, y)$  is continuous in  $y$  had been solved by J. D. Tamarkin [abstract, Bull. Amer. Math. Soc. **35**, 165 (1929)]. The following useful lemma is basic in the discussion. If  $f(x) > 0$ , bounded, and meas. (B), and  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  are bounded,  $\uparrow$ , and continuous on the left, then

$$\int_0^1 f(x) d[g_1(x)g_2(x)] \geq \int_0^1 f(x)g_1(x)dg_2(x) + \int_0^1 f(x)g_2(x)dg_1(x).$$

*E. Hille* (New Haven, Conn.).

**Pincherle, S.:** Le dilatazioni nello spazio delle serie di potenze. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **14**, 343—348 (1936).

A dilatation  $A$  on the space  $S$  of power series is defined by a sequence of numbers  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  and the condition that  $A(x^n) = a_n \cdot x^n$ . The set of these operators form a commutative ring. The infinitesimal transformation of the group is defined by  $X(x^n) = nx^n$ . For any  $f$  of  $S$ :  $X(f) = xDf$  ( $D$  = derivative). The derivative of a linear functional operation  $B$  on  $S$  is defined by the identity:  $B'(\varphi) = B(x\varphi) - xB(\varphi)$ . The Taylor expansion  $A(f\varphi) = A(\varphi)f(x) + A'(\varphi)f'(x) + \dots + A^{(n)}(\varphi)f^{(n)}(x)/n! + \dots$  is formally valid. In particular for  $\varphi = 1$ ,  $A(f) = \sum (\Delta^n a_0) x^n D^n f/n!$ . This assigns a meaning to  $A(x^s) = a_s x^s$  for any  $s$ , and leads to a necessary and sufficient condition that the field of regularity of  $f$  and  $A(f)$  be identical, viz. that  $\Delta^n a_0$  be the coefficients of the expansion of an entire function. *Hildebrandt* (Ann Arbor).

**Mazur, S., et W. Orlicz:** Sur la divisibilité des polynomes abstraits. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 621—623 (1936).

Einfachste Teilbarkeitseigenschaften von Polynomen mehrerer Veränderlichen lassen sich auf abstrakte Polynome [vgl. S. Masur und W. Orlicz, Studia Math. **5**, 50—68 u. 179—189 (1935); ce Zbl. **13**, 210] verallgemeinern. Insbesondere gilt für die abstrakten Polynome die Eindeutigkeit der Zerlegung in irreduzible Polynome.

*A. Kolmogoroff* (Moskau).

**Kantorovitch, Leonidas:** Sur les propriétés des espaces semi-ordonnés linéaires. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 813—816 (1936).

Une définition simplifiée [comparer la Note de l'auteur dans C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **4**, 13—16 (1935); ce Zbl. **13**, 168] des espaces semi-ordonnés linéaires. Soit  $Y$  un espace vectoriel, c'est à dire un groupe additif abélien avec des nombres réels comme opérateurs. On ne suppose à priori aucunes propriétés topologiques de  $Y$ . Au lieu de cela l'auteur propose considérer comme la notion primitive la notion d'un élément positif de  $Y$ . En écrivant  $y' > y''$  quand  $y' - y''$  est positif, les axiomes des espaces semi-ordonnés linéaires s'expriment ainsi: Axiome I. Lorsque  $y > 0$ , on n'a pas  $y = 0$ , ni  $-y > 0$ . — Axiome II. Lorsque  $y' > 0$  et  $y'' > 0$ , on a

$y' + y'' > 0$ . — Axiome III. Quel que soit  $y \in Y$ , il existe un élément  $(y)_+ \in Y$  (la partie positive de  $y$ ) tel que l'on ait  $(y)_+ \geq 0$ ,  $(y)_+ - y \geq 0$  et que l'on ait  $y' > (y)_+$  pour chaque  $y'$  qui vérifie à la fois les conditions  $y' > 0$  et  $y' > y$ . — Axiome IV. Lorsque  $k > 0$  est un nombre réel et  $y > 0$  un élément de  $Y$ , on a  $ky > 0$ . — Axiome V. Quel que soit l'ensemble  $E$  borné supérieurement des éléments  $y$  de  $Y$ , il existe la borne supérieure précise  $\sup E$ . — Soit maintenant

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf_n \{\sup \{y_n, y_{n+1}, \dots\}\}, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = \sup_n \{\inf \{y_n, y_{n+1}, \dots\}\}.$$

On écrit  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , lorsqu'on a  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = y$  et  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ . Un espace semi-ordonné linéaire est régulier, si, quelle que soit une suite  $\{E_n\}$  des sousensembles de  $Y$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sup E_n\} = y_0$  déterminé, il existe une suite des ensembles finis  $E'_n \subset E_n$ , tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sup E'_n\} = y$ . A. Kolmogoroff (Moskau).

### Differenzengleichungen:

**Robinson, L.-B.:** Sur une équation aux différences mêlées. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 1319 (1935).

The author announces an extension of results of Izumi (Tôhoku Math. J. **30**, 10—18) concerning the equation  $f'(x) = a(x)f(\omega(x)) + b(x)$ . C. R. Adams.

**Trjitzinsky, W. J.:** Linear difference equations containing a parameter. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **14**, 181—214 (1936).

The author studies the asymptotic form, in the complex parameter  $\lambda$ , of the solutions of the equation (A)  $\sum_{k=0}^n a_{n-k}(x, \lambda) y(x+k) = 0$ , where

$$a_{n-k}(x, \lambda) \sim \lambda^{m_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n-k, \nu}(x) \lambda^{-\nu} \quad (k = 0, 1, \dots, n; m_k \text{ integral})$$

in the parameter  $\lambda$  at  $\lambda = \infty$  for  $\lambda$  in a region  $R$  and  $|\arg \lambda|$  bounded; the  $\alpha_{n-k, \nu}(x)$  are analytic for  $x$  ( $|x| \geq 1$ ) in any finite part of a region  $K$  such that  $x$  in  $K$  implies  $x-1$  in  $K$ ;

$$\alpha_{n-k, \nu}(x) \sim x^{c_{n-k, \nu}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha_{n-k, \nu}^{\mu} x^{-\mu}$$

( $k = 0, 1, \dots, n; \nu = 0, 1, \dots; c_{n-k, \nu}$  integral); and (A) is formally, and in an extended sense here defined, of Fuchsian type in  $x$ . The investigation follows the lines of recent work of a similar nature by Birkhoff and Trjitzinsky on linear difference equations (see this Zbl. **6**, 168) and by the latter on linear  $q$ -difference and linear differential equations (see this Zbl. **7**, 211; **8**, 255) and linear differential equations containing a parameter (to appear in Acta math.). Thus formal solutions are determined, a sum is obtained for a function of the type  $\lambda^{-lx/p} x^h h(x, \lambda)$ , and a process of iteration (due to Birkhoff) basically employed as an aid to securing the main existence theorem — to the effect that there exists a fundamental set of analytic solutions asymptotically represented by the formal series. The concluding section is devoted to the associated non-homogeneous equation. C. R. Adams (Providence).

### Variationsrechnung:

**Menger, Karl:** Calcul des variations dans les espaces distanciés généraux. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 1007—1009 (1936).

L'Auteur indique une extension des méthodes directes de M. Tonelli au calcul des variations des fonctionnelles curvilignes dans des espaces abstraits très généraux, dont ceux considérés par M. Bouligand, dans ses recherches de calcul des variations géométrique, sont des cas particuliers. Basilio Manià (Pisa).

**Bukrejeff, B.:** Die Zermelosche Navigationsaufgabe. Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math. **1**, 167—170 u. deutsch. Zusammenfassung 170 (1935) [Ukrainisch].

**Salvadori, Mario:** *Ricerche variazionali per gli integrali doppi in forma non parametrica.* Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 5, 51—72 (1936).

The problem considered is that of minimizing an integral of the form  $\iint_R f(x, y, z, z') dx dy$ , wherein  $z'$  means  $\partial z / \partial x \partial y$ . For this problem the analogues of the necessary conditions of Euler, Legendre, Jacobi and Weierstrass are found. The Euler condition is  $(f_z)' + f_z = 0$ , the meaning of the  $'$  being as above. The Legendre and Weierstrass conditions are formally identical with those for single integrals. The Jacobi condition is expressed in terms of the characteristic numbers of a certain integral equation, the Legendre condition being assumed to hold in strengthened form. By expansion methods, it is shown that if  $z_0(x, y)$  is continuous together with certain of its partial derivatives [including  $(z_0')'$ ] on a rectangle  $R$ , and satisfies the Euler condition and the strengthened Legendre and Jacobi conditions, then  $z_0$  furnishes a weak relative minimum for  $\iint_R f(x, y, z, z') dx dy$  in the class of all (sufficiently continuous) functions having the same boundary values as  $z_0$ . *McShane.*

**Froloff, S., et L. Elsholz:** *Limite inférieure pour le nombre des valeurs critiques d'une fonction, donnée sur une variété.* Rec. math. Moscou 42, 637—642 (1935).

The cycle  $Z$  on a manifold  $M$  has length (longueur)  $l$  in  $M$  if  $l$  is the maximum number of cycles  $z_i \subset M$ , different from  $M$ , such that the intersection  $Z \cdot z_1 \cdot z_2 \dots z_l \neq 0$ . The closed set  $F \subset M$  has length  $l$  if  $l$  is the greatest integer  $\mu$  such that in every neighborhood of  $F$  there is a cycle of length  $\mu$ . The length of an empty set is  $-1$ . Suppose  $f(x_1, \dots, x_n)$  is of class  $C''$  on manifold  $M^n$  and  $c$  is an isolated critical value  $[(x)$  local coordinates]. Theorem 1 (Froloff): Let  $\alpha$ ,  $\beta$ , and  $\lambda$  be the respective lengths of the sets  $(\alpha)$  satisfying  $f \leq c - \varepsilon$ ;  $(\beta)$  satisfying  $f \leq c + \varepsilon$ ;  $(\lambda)$  set  $E$  of critical points at which  $f = c$ . Then if  $\varepsilon$  is sufficiently small,  $\lambda \geq \beta - \alpha - 1$ . Let  $[F_i]$  be the class of closed sets on  $M^n$  which have lengths  $\geq i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m = \text{length of } M^n$ . Let  $c_i$  be the minimum of the maxima of the values of  $f$  on the sets of  $[F_i]$ . Theorem 2 (Elsholz): If  $c_i = c_j$ ,  $j > i$ , then there is a set  $P$  of critical points, of length  $\geq j - i$ , such that  $f = c_i = c_j$  at each point of  $P$ . The work is closely connected with that of Lusternik and Schnirelmann (this Zbl. 11, 28), and of course with that of Marston Morse. *A. B. Brown.*

### Funktionentheorie:

**Montel, Paul:** *Sur quelques rapports nouveaux entre l'algèbre et la théorie des fonctions.* (2. congr. des math. roum., Turnu-Severin, 5.—9. V. 1932.) Mathematica, Cluj 9, 47—55 (1935).

**Popken, Jan:** *Über arithmetische Eigenschaften analytischer Funktionen.* Groningen: Diss. 1935. 121 S.

Two principal results of the paper can be formulated as follows: 1. Let  $f(x)$  fulfil the differential equation

$$\sum_{\mu=0}^m p_{\mu}(x) f^{(\mu)}(x) = 0,$$

$p_{\mu}(x)$  being polynomials with a degree  $\leq g$ . Let  $a$  be rational,  $p_m(a) \neq 0$ , and  $R$  may denote the maximal number of rational independent terms in the set  $\{f(a), f'(a), \dots, f^{(m-1)}(a)\}$ . Supposed  $f(x)$  is not a polynomial, a positive number  $c$  exists such that  $c^{h+1} h! R^{-1} \max_{0 \leq \sigma \leq m+g-1} |f^{(h+\sigma)}(a)| \geq 1$ ,  $h = 0, 1, 2, \dots$

2. Let the development of an algebraic function around  $x = 0$  have algebraic coefficients  $c_n$ . Then a constant  $c > 0$  exists such that either  $c_n = 0$  or  $|c_n| \geq c^{-n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  *G. Szegő (St. Louis, Mo.).*

● **Mandelbrojt, S.:** *Séries lacunaires.* (Actualités scient. et industr. Nr. 305. Exposés sur la théorie des fonctions. Publiés par Paul Montel. II.) Paris: Hermann & Cie. 1936. 40 pag.

Das Problem, aus der Natur der Koeffizienten  $a_n$  auf die Verteilung und Art

der Singularitäten der Funktion  $\sum a_n z^n = f(z)$  zu schließen, wurde zuerst von Hadamard behandelt. Sind insbesondere immer wieder Gruppen von Koeffizienten Null, so heißt die Reihe eine Lückenreihe. Eine natürliche Verallgemeinerung des Problems ist die auf Dirichletsche Reihen  $F(s) = \sum a_n e^{-l_n s}$ . Ist  $F(s)$  eine ganze Funktion, so kann man aus der Verteilung der  $l_n$  auf die Existenz gewisser Julia'scher Richtungen schließen. Die einschlägigen Resultate sind hier übersichtlich, teilweise mit Beweis-skizzen sowie Literaturnachweis, zusammengestellt. *Otto Szász* (Cambridge, Mass.).

**Onofri, Luigi:** *Intorno agli zeri di alcune classi di funzioni analitiche.* Mem. Accad. Ital. 6, 1267—1291 (1935).

The first part contains a number of theorems of well known type on sine or cosine series having non-negative sums owing to convexity properties of the coefficients or the like. As an example may be mentioned: If  $b_n \geq 0$ ,  $\Delta(n b_n) \leq 0$ , then  $\sum_1^\infty b_n \sin n\varphi$  converges to a positive sum for  $0 < \varphi < \pi$ . In the second part of the paper these results are applied to a discussion of the number of zeros of a power series  $f(z) = \sum_1^\infty a_n z^n$  inside the unit circle. The underlying idea is that there are exactly  $k$  zeros in  $|z| < 1$  if the real or the imaginary part of  $z^{-k} f(z)$  does not change its sign on  $|z| = 1$ . As a sample of the resulting theorems we can take: If  $a_{k+n} + a_{k-n}$  ( $n=0, 1, \dots, a_{-n-1}=0$ ) is bounded, non negative, convex for  $n \leq k$  and never concave, then  $f(z)$  has  $k$  zeros in  $|z| < 1$ .

*E. Hille* (New Haven, Conn.).

**Macintyre, A. J.:** *Two theorems on „schlicht“ functions.* J. London Math. Soc. 11, 7—11 (1936).

Sharpening a result of Littlewood the author proves the inequalities

$$\left| \frac{f'(z)}{1 - 4f(z)} \right| \leq (1 - |z|^2)^{-1}, \quad |\log(1 - 4f(z))| \leq 2 \log \frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

valid for functions  $f(z)$  univalent and  $\neq 1/4$  in  $|z| < 1$ ,  $f(0) = 0$ . The bounds are attained.

*G. Szegő* (St. Louis, Mo.).

**Ghermanescu:** *Sur le théorème de Picard-Borel.* Ann. École norm., III. s. 52, 221—268 (1935).

L'auteur développe trois notes des C. R. Acad. Sci., Paris (voir ce Zbl. 10, 121 et 266; 11, 119). Il donne donc des conditions (relations de récurrence entre les coefficients) permettant de reconnaître qu'une fonction entière d'ordre fini admet une valeur exceptionnelle de Picard ou Hadamard, avec extensions au cas d'un système linéaire de fonctions entières d'ordre fini, système pour lequel il définit diverses sortes de combinaisons exceptionnelles: non homogènes (ou de Montel), homogènes, fondamentales et primordiales; il complète un théorème de Varopoulos sur les valeurs exceptionnelles des algébroides. A noter que l'A. attribue à Borel le th. d'Hadamard d'après lequel une identité  $f \equiv P + Q e^R$ , où  $f$  est une fonction donnée d'ordre fini,  $P, Q, R$  des polynomes, est unique, et ses généralisations (Hadamard, J. Math. pures appl. 1893, 188—189; Borel, Fonctions entières, Chapitre V). Le th. de Borel, relatif à l'ordre infini, ou au cas où  $Q$  est une fonction entière d'ordre moindre que  $f$ , n'intervient qu'à la fin du mémoire dans les généralisations signalées très sommairement p. 266—267.

*G. Valiron* (Paris).

**Ulrich, Egon:** *Zum Umkehrproblem der Wertverteilungslehre.* Vorl. Mitt. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. 1, 135—150 (1936).

Das Defektproblem der Wertverteilungslehre besteht in der Konstruktion einer in der ganzen Ebene meromorphen Funktion, die gewisse gegebene Werte  $a_v$  mit gegebenen Defekten  $\delta(a_v)$  und Verzweigungsindizes  $\varepsilon(a_v)$  von der Gesamtsumme 2 annimmt. Der Fall  $\varepsilon(a_v) = 0$  wurde durch die von R. Nevanlinna aufgestellten Funktionen  $\nu(z)$  erledigt. Die mit rationalen Funktionen zusammengesetzten  $R(\nu(z))$  liefern weitere Beiträge, aber genügen nicht zur vollständigen Lösung. — Dem Verf.

gelingt die vollständige Lösung durch den folgenden Ansatz. Man betrachte den topologischen Baum (Streckenkomplex) der Funktionen  $R(v(z))$ . Dieser besteht aus einer endlichen Anzahl von periodischen Enden, die untereinander gleich sind: darin liegt der Grund, warum diese Funktionen keine vollständige Lösung geben können. Der Verf. konstruiert nun topologische Bäume, die wiederum periodische Enden besitzen, aber diese sind jetzt vollständig willkürlich. Es läßt sich nun vermuten (und der Beweis soll später erscheinen), daß die zugehörigen Funktionen vom Grenzpunkttypus sein werden. Es ist dann leicht zu sehen, daß diese Funktionenklasse genügend schmiegsam ist, um das gestellte Problem vollständig zu lösen. — Die Arbeit enthält viele instruktive Beispiele von topologischen Bäumen gegebener Funktionen.

*Ahlfors* (Cambridge, Mass.).

**Minetti, Silvio:** *Sulle famiglie di funzioni analitiche ammettenti valori eccezionali e sul comportamento di una funzione uniforme in prossimità di un punto singolare essenzialmente isolato.* Mem. Accad. Ital. **6**, 1293—1307 (1935).

In der Arbeit wird die folgende Tatsache als besonders wichtig hervorgehoben: Sei  $F$  eine Familie von Funktionen, die im Gebiete  $C$  einen Ausnahmewert  $a$  besitzen. Die Normalität von  $F$  ist damit gleichbedeutend, daß man aus jeder Teilfolge entweder eine gegen die Konstante  $a$  konvergierende Folge oder eine im abgeschl. Teilgebiet  $C'$  gleichmäßig von  $a$  entfernte Folge wählen kann.

*Ahlfors.*

**Miranda, Carlo:** *Sur un nouveau critère de normalité pour les familles de fonctions holomorphes.* Bull. Soc. Math. France **63**, 185—196 (1935).

L'Auteur donne la démonstration complète de ce th. énoncé dans une Note précédente (voir ce Zbl. **11**, 311): Toute famille de fonctions  $f(z)$  holomorphes dans un domaine où elles ne prennent pas la valeur  $a$  et où leurs dérivés d'ordre  $k$  ne prennent pas la valeur  $b \neq 0$ , est normale dans ce domaine. Il fait usage de la formule de Jensen-Poisson due à R. Nevanlinna et suit d'assez près l'exposé de Bureau (voir ce Zbl. **1**, 398; **6**, 408) c'est-à-dire la méthode donnée par R. Nevanlinna dans sa démonstration du th. de Landau (Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **1924**), associée au th. de Montel d'après lequel les fonctions holomorphes dans un domaine  $D$  et bornées dans leur ensemble dans tout domaine  $\Delta$  complètement intérieur à  $D$ , forment une famille normale. La proposition utilisée par l'auteur: une famille de fonctions  $f(z)$ , holomorphes pour  $|z| < 1$  est normale dans ce cercle si  $m(r, f) < A$ , où  $m(r, f)$  est la moyenne de Nevanlinna, découle en effet de ce th. de Montel et de l'inégalité de Nevanlinna  $(r - |z|) \log |f(z)| < (r + |z|) m(r, f)$  (Comp. Bull. Sci. math. **1926**, 200).

*G. Valiron* (Paris).

**Staniland, A. E.:** *A note on analytic rotations in Euclidean space of four dimensions.* J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **15**, 65—72 (1936).

Verf. untersucht diejenigen orthogonalen Transformationen im  $w, z$ -Raum, die analytische Flächen wieder in analytische Flächen überführen. Dies sind die analytischen Drehungen [s. schon K. Reinhardt, Analytische Funktionen zweier Veränderlichen. Math. Ann. **83** (1921)], gekoppelt mit der Transformation  $w' = \bar{w}$ ,  $z' = \bar{z}$ . Fixelemente und ausgezeichnete Darstellung werden angegeben.

*Behnke.*

### **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

**Nagel, Ernest:** *The meaning of probability.* J. Amer. Statist. Assoc. **31**, 10—30 (1936).

Vortrag mit anschließender Diskussion über denkbare Interpretationsmöglichkeiten des Wortes „Wahrscheinlichkeit“ im Sprachgebrauch (etwa: „ $X$  ist wahrscheinlich glücklicher als  $Y$ “).

*W. Feller* (Stockholm).

**Bjerke, Bj.:** *Die Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung in genereller Form.* Norsk mat. Tidsskr. **18**, 7—9 (1936) [Norwegisch].

Die elementare Formel dafür, daß von  $n$  Ereignissen mindestens eines bzw. alle eintreten, wird aus einer kombinatorischen Relation abgeleitet, die nach Ansicht des Verf. von der gewöhnlich benutzten verschieden und allgemeiner ist.

*W. Feller.*

**Kaucký, Jos.:** Le problème des itérations dans un cas des probabilités dépendantes. (C. R. Acad. Sci., Paris 202, 722—724 (1936).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die Wahrscheinlichkeiten von Iterationen gegebener Länge bei Ziehungen aus einer Urne zu ermitteln, wobei der Urne nach jeder Ziehung eine fest gegebene Anzahl von Kugeln der betreffenden Farbe beigelegt wird. Die Lösungen werden in Form von erzeugenden Funktionen gegeben. *A. Khintchine.*

**Lévy, Paul:** La loi forte des grands nombres pour les variables aléatoires enchainées. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 11—24 (1936).

Ausführliche Beweise früher angekündigter Ergebnisse (dies. Zbl. 12, 111). Der Beweis des Satzes vom iterierten Logarithmus beruht auf dem entsprechend verallgemeinerten Ljapounoffschen Grenzwertsatz. Für das starke Gesetz der großen Zahlen wird ein elementarer Beweis gegeben. *A. Khintchine (Saratow).*

**Lévy, Paul:** Sur la notion de probabilité conditionnelle. Bull. Sci. math., II. s. 60, 66—71 (1936).

Analyse der Voraussetzungen, unter welchen der folgende plausible Satz richtig ist: Das Ergebnis  $A$  habe die Wahrscheinlichkeit  $a$  und außerdem die bedingte Wahrscheinlichkeit  $\lambda(x)$ , wenn bereits bekannt ist, daß eine gewisse stochastische Veränderliche  $X$  den Wert  $x$  angenommen hat; dann ist  $a$  der wahrscheinliche Wert  $\lambda(x)$ .

*W. Feller (Stockholm).*

**Copeland, Arthur H.:** The probability limit theorem. Duke math. J. 2, 171—176 (1936).

Es wird ein Beweis des zentralen Grenzwertsatzes gegeben, der im wesentlichen mit dem P. Lévy'schen äquivalent ist. Der Zweck ist, durch eine unmittelbare Anknüpfung an die „Matrix Theory of Measurement“ des Verf. [Math. Z. 37 (1933); dies. Zbl. 7, 252] zu beweisen, daß „there is no inconsistency in the assumption that physical measurements behave in the manner described by the theorem“. Es ist jedoch nicht klar ersichtlich, in welcher Richtung die vorliegende Arbeit über die zitierte hinübergreifen soll. *W. Feller (Stockholm).*

**Tricomi, F.:** Ancora sulla rappresentazione di una legge di probabilità mediante esponenziali di Gauss. Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 42—44 (1936).

Zurückkommend auf seine Untersuchungen über die Darstellbarkeit eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes mittels der Gaußschen Funktion (dies. Zbl. 12, 28) bemerkt der Verf., daß die in den Integraldarstellungen auftretende „Gewichtsfunktion“  $C(\alpha)$  nicht notwendig positiv sein muß; er führt hierbei noch einige weitere Ergänzungen sowie Literaturhinweise an. *Bruno de Finetti (Trieste).*

**Onicescu, O., e G. Mihoc:** Sopra le leggi-limite delle probabilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 54—69 (1936).

Une urne contient  $2k$  boules blanches et  $2k$  noires. On tire une boule; si c'est une blanche, on dépose ensuite dans l'urne une boule noire; si l'on extrait une noire, on dépose une blanche. Soit  $\nu$  le nombre de boules blanches extraites dans  $n$  tirages successifs; on a toujours  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\nu}{n} - \frac{1}{2} \right) = 0$ , la limite étant prise au sens habituel

d'Analyse. Si  $x$  est l'écart:  $x = \nu - \frac{n}{2}$ , et  $P_n(x)$  la probabilité d'écart  $x$  pour une série de  $n$  tirages, l'auteur trouve  $P(x) = \frac{1}{2^{4k-1}} C_{4k}^{2k-2x}$ ,  $C$  étant les coefficients binomiaux. Si  $k$  est très grand, la valeur de  $P(x)$  tend vers la formule de Gauss

$$P(x) = \frac{2}{\sqrt{2k\pi}} e^{-\frac{2x^2}{k}}. \quad B. Hostinsky (Brno).$$

**Gonin, H. T.:** The use of factorial moments in the treatment of the hypergeometric distribution and in tests for regression. Philos. Mag., VII. s. 21, 215—226 (1936).

In studying the character of discrete distributions involving hypergeometric series, it has been customary to utilize ordinary power moments. The author claims that

factorial moments — the  $r$ -th factorial moment of  $f(x)$  is defined by  $m_{(r)} = \sum x^{(r)} f(x)$ , where  $x^{(r)} = x(x-1) \dots (x-r+1)$  — are more appropriate and supports this claim by demonstrating their rapid effectiveness in handling a large number of problems already treated by other writers namely, K. Pearson, *Biometrika* **16**, 172—204 (1924); **13**, 296—300 (1921); S. J. Pretorius, *Biometrika* **22**, 140—143 (1930); A. A. Tschuprow, *Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie*, 1927; S. D. Wicksell, *Philos. Mag.*, VI. s. **33**, 389—394 (1917); A. C. Aitken, *Edin. Math. Notes* **1935**; H. E. Soper, *Frequency Arrays* **1922**; J. Neyman, *Biometrika* **18**, 257 (1926).

*Albert A. Bennett* (Providence).

● **Reichel, Heinrich: Die wichtigsten mathematischen Methoden bei der Bearbeitung von Versuchsergebnissen und Beobachtungen.** Sonderdruck aus: *Abderhalden, Handb. d. biolog. Arbeitsmethoden. Abt. 5, Tl. 10.* Berlin u. Wien: Urban & Schwarzenberg 1935. 88 S. u. 29 Abb. RM. 4.—.

This booklet was designed particularly to help workers in biology and hygiene to use correctly and to understand elementary statistical methods of use to them. Some 50 pages are devoted to brief exposition of a necessarily limited number of topics, and the remaining 35 to illustrative numerical examples with explanatory notes. The topics dealt with include the use of the normal frequency function and the calculation of its characteristics, curve fitting for straight lines and curves simply reduced to the linear case (the use of the logarithmic transformation is given a prominent place throughout), the coefficient of correlation, and a simple method of dealing with  $2 \times 2$  contingency tables. The standard errors of quantities calculated from samples are derived, for the most part in forms valid only for large samples. Variances, regression coefficients and correlation coefficients from samples are defined so as to give "best estimates" though the explanation given, in the case of the variance only, does not make this point clear to the reader. *C. C. Craig* (Ann Arbor).

**Boehm, Carl: Versuch einer systematischen Darstellung der modernen Risikotheorie. II. Betriebswirtschaftliche Untersuchungen.** *Bl. Versich.-Math.* **3**, 359—379 (1936).

I. vgl. dies. Zbl. **11**, 127.

**Lenzi, E.: Ammortamento a due tassi nell'assicurazione sulla vita e l'optimum nella misura del riscatto.** *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **7**, 1—15 (1936).

Wird eine Schuld vom Barwerte  $\pi$  durch  $n$  vorschüssige Annuitäten vom Betrage  $\frac{\pi}{a_{\overline{n}|}}$  getilgt und soll die jeweilige Restschuld  $\frac{\pi}{a_{\overline{n-k}|}}$  durch eine Todesfallsversicherung garantiert werden, so erhält man für die einmalige Nettoprämie  $U = \frac{\pi}{d a_{\overline{n}|}} (A_{x:\overline{n}|} - v^n)$ , schlägt man noch die Verwaltungskosten hinzu, so ergibt sich  $U' = U + \psi \pi a_{x:\overline{n}|}$ . Bedeutet  $A'$  die einmalige Tarifprämie einer Erlebensversicherung, die mindestens  $n$  Jahre dauert und für welche  $n$  gleiche Jahresprämien  $P''$  bezahlt werden, so ergibt sich, wenn  $\pi = A' + U'$  gesetzt wird,  $\frac{\pi}{a_{\overline{n}|}} = \frac{A'}{a_{x:\overline{n}|}(1 - \psi a_{\overline{n}|})}$ . Diese Überlegungen gestatten auch einen neuen Einblick in den Begriff der Prämienreserve. Neben dieser theoretischen Fragestellung wird die praktische Anwendung, insbesondere der Interessengegensatz von Versicherer und Versichertem, die Frage zweier verschiedener Zinssätze für den Versicherungs- und den Darlehensvertrag beleuchtet, sowie die Bedeutung der Prämienreserve in diesem Falle klargelegt. Schließlich wird der Zusammenhang zwischen reiner Reserve, gezillmerter und reduzierter Reserve untersucht.

*F. Knoll* (Wien).

**Lenzi, E.: Sulle iterazioni elementari concernenti la formula di Eulero.** *Giorn. Ist. Ital. Attuari* **7**, 51—53 (1936).

Nach der Feststellung, daß das von Huszár angegebene Verfahren (vgl. dies. Zbl. **12**, 217) von Lenzi bereits früher [*Giorn. Ist. Ital. Attuari* **5**, 250 (1934)] erkannt und veröffentlicht wurde, wird ein sehr rasch zum Ziel führendes Iterationsverfahren:

$$i_2 = \frac{1}{a} - \left(\frac{a}{a_1}\right)^{\varrho} \frac{1}{s_1}, \quad \varrho = \frac{n i_1}{1 + i_1 - n/s_1} - 1, \text{ angegeben und bewiesen.} \quad F. Knoll.$$

**Pacifico, M.: Di un semplice metodo per la costruzione di tavole ridotte e selezionate di primo anno.** Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 45—50 (1936).

Hat  $d_x$ ,  $l_x$ ,  $q_x$  die übliche Bedeutung und mißt  $s(u) du$  die zu Beginn vorhandenen Versicherten,  $n(u) du$  die neu hinzukommenden,  $w(u) du$  die durch Tod ausscheidenden,  $e(u) du$  die am Ende noch vorhandenen Versicherten, die dem Altersintervall  $[u, u + du]$  angehören und ist  $q(u, x + 1)$  die Wahrscheinlichkeit im Altersintervall  $[u, x + 1]$  zu sterben, so besteht, wenn sich  $q'$  auf die Sterbenswahrscheinlichkeit der Neueingetretenen,  $q''$  auf die des älteren Bestandes bezieht, die Beziehung  $q'' \left\{ l_x + r_x \int_x^{x+1} n(u) (x + 1 - u) du + \int_x^{x+1} [s(u) - w(u) - e(u)] (x + 1 - u) du \right\} = d_x$ ; dabei wird die Annahme  $q'(u, x + 1) = q'_x \cdot (x + 1 - u)$ ;  $q''(u, x + 1) = q''_x \cdot (x + 1 - u)$  gemacht und  $q'_x = r_x q''_x$  gesetzt. Für die Aggregattafel ist aber

$$d_x = E_x q_x = q_x \left\{ l_x + \int_x^{x+1} [s(u) - w(u) - e(u)] (x + 1 - u) du \right\};$$

daraus folgt aber die Formel  $q''_x \left\{ 1 - (1 - r_x) \frac{1}{E_x} \int_x^{x+1} n(u) \cdot (x + 1 - u) du \right\} = q_x$ . Setzt man  $s_x = \int_x^{x+1} s(u) du$  usw., so erhält man  $q''_x \left[ 1 - \frac{1}{2} (1 - r_x) \frac{n_x}{E_x} \right] = q_x$ . Beziehen sich aber die Größen  $s_x, n_x, \dots$  auf das Altersintervall  $[x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}]$ , so bietet der Übergang keine Schwierigkeit. Haben die Größen  $q_x, q_{[x]}, q_x^{(1)}$  den bekannten Sinn, so folgen die Formeln  $q_x^{(1)} \left[ 1 - (1 - r_{[x]}) \frac{n_{[x]}}{E_x} \right] = q_x, q_{[x]} = r_{[x]} q_x^{(1)}$ . F. Knoll (Wien).

## Numerische und graphische Methoden.

**Lothington, John: Methode zur Berechnung der Quadratwurzel einer Zahl mit besonderer Rücksicht auf die Verwendung der Rechenmaschine.** Norsk mat. Tidsskr. 18, 10—11 (1936) [Norwegisch].

Die von Ottestad beschriebene Methode (vgl. dies. Zbl. 12, 364) wird besprochen und verschärft. E. J. Nyström (Helsingfors).

**Deweck, M.: Un procédé graphique d'interpolation par application de la méthode des moindres carrés.** Mathesis 49, 412—418 (1935).

Let  $(x_i, y_i)$  be the  $i$ -th pair of observed values with weight  $p_i$  of a set of  $n$  observations made on the two variables  $x$  and  $y$ . This paper gives a graphical method of determining the line of best fit based on the fact that the required line is determined by the barycenters of the system of points corresponding to the observations, first taken with the masses  $p_i$  and second with the masses  $p_i x_i$ . This method seems more satisfactory than Mehmke's method (described by H. G. Schwerdt, Physik. Z. 1919, 362—368) heretofore proposed which uses the first only of the two facts. The author in extending his method to non-linear functions, points out two errors in Schwerdt's (loc. cit.) analogous extension of Mehmke's method. Craig (Ann Arbor, Mich.).

**Levy, H., and J. C. Gaseoigne: On the combination of observational data.** Proc. Physic. Soc., London 48, 79—84 (1936).

Suppose that corresponding to the precisely given set of values  $(x_1, \dots, x_n)$  of an independent variable  $x$  two different observers find the sets of values  $(A_1, \dots, A_n)$  and  $(B_1, \dots, B_n)$  of an empirical function of  $x$ . The present problem is to derive a third set of values from these two,  $(Y_1, \dots, Y_n)$  which correlates most highly with  $(A)$  and  $(B)$ , in the sense that a homogeneous symmetrical function of the correlations  $r_{ay}$  between  $(A)$  and  $(Y)$  and  $r_{by}$  between  $(B)$  and  $(Y)$  shall be a maximum. The solution, using standard variables is straightforward. The mean and the variance of the  $Y$ 's

being found by minimizing the form  $\sum_{g=1}^n [(Y_g - A_g)^2 + (Y_g - B_g)^2]$ . The solution in this case does not depend on the form of the homogeneous symmetrical function  $F(r_{ay}, r_{by})$  but when the problem is extended to  $m$  sets of observations  $(A), (B), (C), \dots$ , this is no longer true and  $F$  is taken to be  $r_{ay} + r_{by} + r_{cy} + \dots$  *C. C. Craig.*

**Robertson, J. Monteath:** Numerical and mechanical methods in double Fourier synthesis. Philos. Mag., VII. s. 21, 176—187 (1936).

Bei der Feinstrukturuntersuchung wird die Synthese von Ausdrücken  $\varrho(x, y)$   

$$= \frac{1}{A} \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(h, k, 0) \cos 2\pi(hx/a + ky/b)$$
 erforderlich. Nach einer Übersicht über instrumentelle Ausführungsmöglichkeiten wird eine ähnlich den bekannten Schablonenverfahren mechanisierte numerische Methode ausführlich beschrieben. *G. Koehler.*

**Ott, L. A.:** Neue Planimeter und Integrimeter. Meßtechn. 12, 41—45 (1936).

Als Integrimeter bezeichnet der Verf. Instrumente, die im Gegensatz zu Planimetern die Auswertung unbestimmter Integrale gestatten. Es wird die ganz einfache Wirkungsweise des Integrimeters für  $\int y dx$  gezeigt und die hieraus sich ergebenden Instrumente für  $\int y^2 dx$ ,  $\int \sqrt{y} dx$ ,  $\int y^3 dx$  und  $\int \frac{dx}{y}$  beschrieben. Ferner wird gezeigt, daß man mit gleichen Mitteln diese Instrumente auch für Polarkoordinaten bauen kann. Zum Schluß wird noch auf die wohl unübertrefflich einfache Radialplanimeterkonstruktion mit Kurvenschlitz hingewiesen. *G. Koehler (Darmstadt).*

**Falkner, V. M.:** A method of numerical solution of differential equations. Philos. Mag., VII. s. 21, 624—640 (1936).

Zur schrittweisen numerischen Lösung einer (nichtlinearen) gewöhnlichen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung für  $Y(x)$  wird bei den äquidistanten Abszissen  $x = a, a + w, a + 2w \dots$  das Differenzenschema für die Funktion  $Y^{(n)} = y$  gebildet und die Werte von  $Y^{(n)}$  und seinen Integralen  $Y^{(n-1)}, \dots, Y', Y$  an der Stelle  $a + w$  durch  $Y, Y', \dots, Y^{(n)}$  an der Stelle  $a$  und die im Differenzenschema auftretenden Größen  $\delta y_{-1/2}, \delta^2 y_{-1}, \delta^3 y_{-3/2}, \dots$  ausgedrückt (im wesentlichen durch wiederholte Integration der Gregory-Newton'schen Interpolationsformel) in der Art:

$$\begin{aligned} Y^{(n-1)}(a+w) &= Y^{(n-1)}(a) + w y_0 + \frac{1}{2} w \delta y_{-1/2} + \frac{1}{1 \cdot 2} w^2 \delta^2 y_{-1} + \frac{1}{3} w \delta^3 y_{-3/2} \\ &\quad + \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{1}{2} w^2 \delta^4 y_{-2} + \dots, \\ Y^{(n-2)}(a+w) &= Y^{(n-2)}(a) + w Y^{(n-1)}(a) + \frac{1}{2} w^2 y_0 + \frac{1}{6} w^2 \delta y_{-1/2} + \frac{1}{8} w^2 \delta^2 y_{-1} + \frac{1}{1 \cdot 8 \cdot 0} w \delta^3 y_{-3/2} \\ &\quad + \frac{1}{3 \cdot 2} w^2 \delta^4 y_{-2} + \dots \end{aligned}$$

Beim Rechnen mit der „ $r$ -ten Approximation“ wird  $\delta^r y_{-r/2} = \varepsilon$  als Unbekannte eingeführt, alle höheren Differenzen  $= 0$  gesetzt und alle  $Y, Y', \dots, Y^{(n)}$  an der Stelle  $a + w$  durch  $\varepsilon$  ausgedrückt. Beim Einsetzen dieser Größen  $Y^{(v)}$  in die Differentialgleichung erhält man eine Bestimmungsgleichung für  $\varepsilon$ . Es folgen zwei ausführliche numerische Beispiele: I.  $Y'' = Y Y'$  mit  $Y(0) = 0, Y'(0) = 2$ ; das zur Aufstellung des Differenzenschemas notwendige Anfangsstück (bis  $x = 0,15$ ) wird von der hier in geschlossener Form angebbaren Lösung  $Y = 2 \cdot \operatorname{tg} x$  als bekannt angesehen und die mit der vierten Approximation und der Maschenweite  $w = 0,05$  bis zu  $x = 1$  berechnete Näherung mit der exakten Lösung verglichen. II. Bei der von der Hydrodynamik her bekannten Gleichung  $Y''' = Y Y''$  mit  $Y(0) = Y'(0) = 0$  und  $Y''(0) = -1$  wird das Anfangsstück bis zu  $x = 0,5$  aus einer Taylorentwicklung an der Stelle  $x = 0$  gewonnen. Die mit dritter und mit vierter Approximation berechneten Lösungen ( $w = 0,1$  und  $0 \leq x \leq 4,6$ ) werden miteinander und mit der von H. Toepfer nach dem Runge-Kuttaschen Verfahren (Z. Math. Phys. 1912, 397) berechneten, weniger genauen Lösung verglichen.

*L. Collatz (Karlsruhe).*

## Geometrie.

**Leemans, J.:** Sur la géométrie du triangle. *Mathesis* **50**, 81—83 (1936).

**Turrière, Émile:** Sur un cas de dégénérescence de la géométrie du triangle. *Bull. Soc. Math. France* **63**, 210—225 (1935).

L'auteur étudie les limites de certains éléments du triangle, constitué par trois tangentes d'une courbe plane ( $C$ ), quand les tangentes viennent se confondre avec la tangente en un point  $O$  de ( $C$ ), où le rayon de courbure est  $\rho$ . Il donne la limite du cercle circonscrit (un cercle de rayon  $\frac{1}{4}\rho$ ), celles de l'orthocentre et des cercles inscrits, la limite de la transformation isogonale, celles des coniques circonscrites, des coniques conjuguées et des coniques tritangentes. Lorsque ( $C$ ) est une conique, la limite du cercle conjugué du triangle donne un théorème connu de Steiner, dont l'auteur obtient une généralisation. Il finit par une étude des cercles associés dans la transformation isogonale. O. Bottema (Deventer, Holl.).

**Goormaghtigh, R.:** Sur le tranchet d'Archimède et sur un triangle spécial. *Mathesis* **50**, 83—86 (1936).

**Thébault, V.:** Sur des plans associés au tétraèdre. *Mathesis* **50**, Nr 3/4, Suppl., 1—16 (1936).

**Fouks, B.:** Éléments de géométrie descriptive (projections orthogonales) sur les modèles mobiles. *Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math.* **1**, 198—203 u. franz. Zusammenfassung 203 (1935) [Ukrainisch].

**Dingeldey, Friedrich:** Die Gleichung für die Halbachsen eines Mittelpunktskegelschnittes bei beliebigen Dreieckskoordinaten. *Tôhoku Math. J.* **41**, 445—450 (1936).

**Usai, Giuseppe:** Inviluppi di cerchi in relazione con altre curve. *Esercit. Mat.*, II. s. **9**, 1—9 (1936).

**Pfeiffer, G., et G. Drinfeld:** Sur les courbes planes et les développées. *Bull. Sci. Univ. Kiev, Rec. math.* **1**, 48—74 (1935) [Ukrainisch].

Les auteurs examinent l'influence du point singulier d'une courbe algébrique plane sur sa développée. Ils indiquent quelques procédés particuliers pour étudier la question; après cela, en supposant, que le point singulier se trouve à l'origine, ils ramènent l'étude de la question aux cas, quand la courbe est donnée par l'équation:

$$y = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (1)$$

ou par les équations:

$$\begin{aligned} x &= a_0t^m + a_1t^{m+1} + \dots + a_nt^{m+n} + \dots, & a_0 &\neq 0 \\ y &= b_0t^{m+k} + b_1t^{m+k+1} + \dots + b_nt^{m+k+n} + \dots, & b_0 &\neq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$k, m$  étant des nombres entiers.

Autoreferat.

**Sibirani, Filippo:** Proprietà delle curve  $y = ax + \lambda x^h$  e degli inviluppi  $v = au + \lambda u^h$ . *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna*, IX. s. **1**, 9—11 (1934).

**Bouligand, Georges:** Introduction à l'étude locale des fonctions algébriques d'une variable et des courbes algébriques planes. *Bull. math. Fac. Sci. et grandes Écoles* **2**, 129—144 (1935).

**Weiss, E. A.:** Die geschichtliche Entwicklung der Lehre von der Geraden-Kugel-Transformation. II. Die Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum. Euklidischer Fall. *Deutsche Math.* **1**, 125—145 (1936).

**Andruetto, Giacinta:** Area descritta da un segmento variabile nello spazio. *Atti Ist. Veneto Sci. etc.* **94**, 745—751 (1935).

Der Punkt  $P(t)$  beschreibe eine Raumkurve, und es sei ein variabler Vektor  $u(t) = \vec{PQ}$  gegeben. Es wird der Flächeninhalt des von der Strecke  $PQ$  beschriebenen Stückes einer Regelfläche berechnet und die gefundene Formel für einige besondere Flächenklassen spezialisiert. W. Fenchel (Kopenhagen).

**Martinelli, Enzo:** Sui coni proiettanti da un punto di una superficie di Jordan i rimanenti punti di essa. Boll. Un. Mat. Ital. 15, 66—71 (1936).

Si stabilisce che tra i coni proiettanti da un punto di un pezzo non piano di superficie di Jordan i rimanenti punti di esso, esistono sempre dei coni solidi. Si fa inoltre un' applicazione di tale risultato. *Autoreferat.*

### **Differentialgeometrie:**

**Bouligand, Georges:** Sur quelques points de théorie des enveloppes. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 103—111 (1936).

Es wird eine hinreichende Bedingung für die Ableitungen von  $G(x, y; a)$  angegeben, damit die Einhüllende der Flächenschar  $z = G(x, y; a)$  eine Rückkehrkante besitzt. *W. Feller (Stockholm).*

**Mitrinowitch, Dragoslav:** Remarques sur les lignes asymptotiques et sur les lignes de courbure. Prakt. Akad. Athénon 10, 480—483 (1935).

Es werden die Differentialgleichungen der Flächen  $z = F(x, y)$  angegeben, deren Asymptoten- bzw. Krümmungslinien sich auf orthogonale Kurvenscharen der  $x, y$ -Ebene projizieren. *W. Feller (Stockholm).*

**Cohn-Vossen, Stefan:** Der approximative Sinussatz für kleine Dreiecke auf krummen Flächen. (Auszug aus einem Brief an Prof. T. Levi-Civita.) Compositio Math. 3, 52 bis 54 (1936).

L'auteur donne une démonstration directe du théorème cité de M. Levi-Civita (ce Zbl. 8, 411). Soit  $\alpha_i$  les angles d'un triangle plan curviligne  $A_1 A_2 A_3$ ,  $l_i =$  ses côtés,  $\gamma_i =$  la courbure de  $l_i$  à un point arbitraire,  $\beta_i, m_i =$  les angles et les côtés du triangle  $A_1 A_2 A_3$  rectiligne,  $w_i =$  l'angle entre  $l_i$  et  $m_i$ . Si  $\gamma_i$  est une fonction continue, on a  $l_i \sim m_i \left( \text{c.-à-d.} \lim_{l_i \rightarrow 0} \frac{l_i - m_i}{l_i^2} = 0 \right)$ ,  $w_i \sim \frac{1}{2} \gamma_i m_i$ , donc  $2\delta_i = 2(\alpha_i - \beta_i) \sim \gamma_{i+1} m_{i+1} + \gamma_{i+2} m_{i+2}$  et un développement de  $\sin \alpha_i = \sin(\beta_i + \delta_i)$  en série de Taylor donne  $l_i / \sin \alpha_i \sim \frac{m_i}{\sin \beta_i} (1 - \delta_i \operatorname{ctg} \alpha_i)$ . Or si le triangle est tracé sur une surface  $S$ , les quantités  $l_i, \alpha_i, \gamma_i$  dans l'approximation admise dépendent des valeurs des coefficients de  $ds^2$  de  $S$  au point  $A$  et de ses dérivées du premier ordre, tandis que la courbure de  $S$  en dépend des dérivées du second ordre. Il en suit que les formules obtenues sont valables pour une surface  $S$  arbitraire dont la courbure est une fonction continue. *S. Finikoff (Moscou).*

**Stoker, J. J.:** Über die Gestalt der positiv gekrümmten offenen Flächen im dreidimensionalen Raume. Compositio Math. 3, 55—88 (1936).

Es werden zweimal stetig differentiierbare, singularitätenfreie (nicht notwendig doppelpunktfreie) Flächen im dreidimensionalen Raum betrachtet, die vollständig (vgl. dazu z. B. Hopf und Rinow, dies. Zbl. 2, 350) und überall positiv gekrümmt sind. Es gelingt dem Verf., die möglichen Formen dieser Flächen erschöpfend zu beschreiben, und zwar wird gezeigt: Eine solche Fläche ist stets doppelpunktfrei und entweder der Kugel oder der euklidischen Ebene homöomorph. Im ersten Fall ist sie eine geschlossene konvexe Fläche. (Hiermit ist ein Satz von Hadamard wiedergewonnen, nach welchem eine geschlossene Fläche positiver Krümmung konvex ist.) Im zweiten Fall ist sie eine offene konvexe Fläche, d. h. sie zerlegt den Raum in zwei unbeschränkte Gebiete, von denen eines konvex ist; sie läßt sich in ihrem ganzen Verlauf in der Form  $z = f(x, y)$  darstellen, wo  $f$  in einem konvexen Gebiet der  $x, y$ -Ebene konvex ist; die sphärische Abbildung ist eineindeutig, das sphärische Bild in einer Halbkugel enthalten und sphärisch konvex. — Die verwendeten Hilfsmittel sind recht elementar. Es handelt sich hauptsächlich um analoge (einfach beweisbare) Sätze für ebene Kurven, die stets im selben Sinne gekrümmt sind. Der Beweis beruht auf Betrachtungen von Niveaulinien und Schattengrenzen. Es bestehen einige Berührungspunkte zu der Arbeit von Cohn-Vossen, Singularitäten konvexer Flächen

[Math. Ann. 97, 377—386 (1927)], in der Flächen betrachtet werden, die nicht notwendig vollständig sind, deren Krümmung jedoch größer als eine positive Konstante angenommen wird. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Rinow, Willi:** Über vollständige differentialgeometrische Räume. Deutsche Math. 1, 46—63 (1936).

Verf. überträgt seinen Eindeutigkeitssatz für differentialgeometrische Flächen (vgl. dies. Zbl. 4, 367) auf allgemeine affine Räume. (Für Riemannsche Räume beliebiger Dimension vgl. Myers, dies. Zbl. 11, 225.) Unter einem allgemeinen affinen Raum wird im Anschluß an Douglas, The general geometry of paths, Ann. of Math. 29, 143—168 (1928) eine analytische Mannigfaltigkeit verstanden, in der „Geraden“ und auf diesen bis auf ganze lineare Transformationen festgelegte „affine Normalparameter“ ausgezeichnet sind. Zwei solche Räume heißen affin aufeinander abbildbar, wenn es eine eindeutige Abbildung gibt, bei der Geraden in Geraden und Normalparameter in Normalparameter übergehen. Ein allgemeiner affiner Raum wird vollständig genannt, wenn auf jeder Geraden für einen Normalparameter (also für alle) jedem endlichen Parameterwert ein Punkt der Geraden entspricht (Analogon des Abtragbarkeitspostulats von Hopf und Rinow, vgl. dies. Zbl. 2, 350; ist der Raum speziell ein Finslerscher, so kann diese Forderung durch die Analoga der anderen nach Hopf und Rinow für vollständige Flächen charakteristischen Postulate ersetzt werden). Der Eindeutigkeitssatz besagt dann: Enthalten zwei einfach zusammenhängende affine Räume affin aufeinander abbildbare Teilgebiete, so läßt sich deren Abbildung zu einer affinen Abbildung der ganzen Räume aufeinander erweitern. Hiernach kann analog den früher behandelten speziellen Fällen die Bestimmung aller vollständigen affinen Räume, zu denen ein „Element“ fortgesetzt werden kann, auf ein gruppentheoretisches Problem zurückgeführt werden. Es werden Anwendungen auf Finslersche und Gruppenräume gemacht, wobei sich teils neue, teils bekannte Sätze ergeben. Ferner wird die Theorie der konjugierten Punkte für allgemeine affine Räume kurz entwickelt, und es werden einige diesbezügliche Sätze der zitierten Arbeit des Verf. auf den hier behandelten allgemeinen Fall übertragen. *W. Fenchel*.

**Foster, Malcolm:** Congruences with a common middle envelope. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 74—76 (1936).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit [Ann. of Math. 25, 159—180 (1923)] betrachtet Verf. zwei Strahlensysteme, deren Strahlen  $l$  und  $\bar{l}$  durch einen Punkt  $P$  der Richtungskugel und durch die Schnittpunkte  $a$  und  $b$  von  $l$  und  $\bar{l}$  mit der Tangentenebene der Kugel in  $P$  gegeben sind. Die Punkte auf  $l$  und  $\bar{l}$  werden durch ihre Entfernung von  $a$  und  $b$  gemessen. Zwei Strahlensysteme haben „gemeinsame Mittenflächen“, wenn die Mittelpunkte von den zugehörigen Punkten  $a$  und  $b$  den gleichen Abstand haben. Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu ist, daß die Mittenfläche des zum Punkt  $a - b$  gehörenden Strahlensystems in einen Punkt entartet. — Es folgen einige Anwendungen dieses Ergebnisses. *Haack* (Berlin).

**Lebel, J.:** Enveloppes de cercles ou de sphères. Surfaces applicables. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 25—41 (1936).

Untersucht werden, zunächst synthetisch, einparametrische Scharen von Kreisen der Ebene, die ihre Einhüllende in zwei Punkten  $A, B$  derart berühren, daß die Berührungspunkte auf der Einhüllenden gleiche Bögen beschreiben, wenn der Kreis die Schar durchläuft. Es zeigt sich, daß zwei Fälle zu unterscheiden sind, der triviale Fall, in dem der Kreismittelpunkt eine Gerade beschreibt, und folgender zweite Fall: ( $K$ ) sei eine beliebige Kurve,  $I$  der zum Punkte  $K$  von ( $K$ ) gehörige Krümmungsmittelpunkt. Auf der Tangente von ( $K$ ) im Punkte  $K$  trägt man nach beiden Seiten das konstante Stück  $a$  ab und erhält die Punkte  $A, B$ . Der Kreis mit dem Mittelpunkt  $I$  und dem Radius  $IA = IB$  beschreibt dann eine Schar der verlangten Art. Im Sonderfalle, daß ( $A$ ) eine Gerade ist, wird ( $K$ ) eine Traktrix und ( $I$ ) die zugehörige Ketten-

linie. Die Aufgabe, einparametrische Kreisscharen mit derselben Eigenschaft im Raume zu finden, wird auf die für die Ebene gelöste Aufgabe dadurch zurückgeführt, daß die Fläche der Geraden  $AB$  auf die Ebene abgewickelt wird. Es folgt die Untersuchung von Kreisscharen der beschriebenen Eigenschaft auf der Kugel. Dann wird eine räumliche Verallgemeinerung der Aufgabe in Angriff genommen: Es sollen Systeme von  $\infty^2$  Kugeln gefunden werden, deren Einhüllende zwei aufeinander abwickelbare Mäntel besitzt, und zwar derart, daß jede Kugel in zwei Punkten berührt, die sich bei der Abwicklung entsprechen. Es wird der Fall zweier Zylinder, zweier Kegel und der Fall einer Ebene und einer abwickelbaren Fläche behandelt. Schließlich wird analytisch (Lösung von Differentialgleichungen) der Sonderfall des ebenen Problems untersucht, in dem die Kurve ( $A$ ) eine Gerade ist, und der Sonderfall des räumlichen Problems, in dem die Einhüllende aus einer Ebene und einer abwickelbaren Fläche besteht.

*E. A. Weiss* (Bonn).

**Vincensini, P.:** Sur certains systèmes cycliques arbitrairement déformables. Bull. Soc. Math. France **63**, 155—184 (1935).

Un système cyclique ( $C$ ) est arbitrairement déformable s'il existe une surface  $S$  dont les plans tangents sont invariablement liés avec les cycles homologues de ( $C$ ) et qui au cours d'une déformation arbitraire transforme ( $C$ ) en système cyclique. Après avoir établi les formules pour un système ( $C$ ) dans sa position générale par rapport à  $S$ , l'auteur examine ( $C$ ) dont les cycles sont normaux aux plans tangents homologues de  $S$ . Solutions: 1° Les axes de ( $C$ ) touchent  $S$ ; le système ( $C$ ) est un système de Ribaucour à rayons constants associé à une surface pseudo-sphérique arbitraire. 2°  $S$  est développable; la congruence des axes est  $\infty$  fois cyclique. 3°  $S$  est applicable sur une surface de révolution; à chaque surface on peut associer  $\infty^2$  systèmes ( $C$ ). Le cas a été étudié dans un mémoire antérieur de l'auteur [Ann. École norm., III. s. **47**, 381 (1930)]. 4°  $S$  appartient à une classe de surfaces  $\Sigma$  dont  $ds^2$  dépend de  $b$  constantes arbitraires; un seul système ( $C$ ) est associé à chaque élément linéaire de la forme  $\Sigma$ .

*S. Finikoff* (Moscou).

**Vincensini, Paul:** Sur certaines suites de Laplace. C. R. Acad. Sci., Paris **202**, 897—899 (1936).

L'auteur examine dans l'espace  $E_n$  une suite de Laplace  $\dots N_2 N_1 N_0 R M_0 M_1 M_2 \dots$  dont deux réseaux  $M_0$  et  $N_0$  sont  $O$  ( $O$  = orthogonal). Les réseaux successifs de deux en deux  $M_2$  et  $N_2$ ,  $M_4$  et  $N_4$  etc. en sont respectivement  $2O$ ,  $3O$  etc. ( $pO$  = la projection sur  $E_n$  d'un réseau  $O$  de  $E_{n+p-1}$ ). De même, si  $\Gamma C$  et  $\Delta D$  sont respectivement les congruences de normales de  $M_0$  et  $N_0$ , si  $\dots \Gamma_2 \Gamma_1 \Gamma C C_1 \dots \Delta_1 \Delta D D_1 D_2 \dots$  sont les suites de Laplace correspondantes, les congruences  $C C_1, C_1 C_2 \dots$  par exemple sont respectivement orthogonales à  $R, N_0 \dots$  et conjuguées à  $M_1, M_2 \dots$ . Si  $M_2$  est  $O$ , tous les réseaux  $M_{2k}, N_{2k}$  sont  $O$  et la suite  $\dots \Gamma_2 \Gamma_1 \Gamma C C_1 \dots$  se confond avec  $\dots D \Delta \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 \dots$  dont les congruences  $\Gamma_2 \Gamma_1; \Gamma C, C_1 C_2$  etc. sont normales à  $N_0, M_0, M_2$  etc.

*S. Finikoff* (Moscou).

**Rozet, O.:** Sur les congruences  $W$  dont le complexe osculateur dépend d'un seul paramètre. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **3**, 170—171 (1934).

Ce sont les congruences à focales réglées. Le complexe osculateur reste fixe le long des génératrices correspondantes.

*S. Finikoff* (Moscou).

**Rozet, O.:** Recherches sur les congruences  $W$ . Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. **20**, fasc. 2, 1—31 (1935).

En adoptant la méthode et les notations de M. Godeaux (ce Zbl. **9**, 227) l'auteur poursuit et complète son étude de la congruence  $W$  au point de vu du nombre des points caractéristiques des quadriques de Lie  $\Phi$  et  $\bar{\Phi}$  attachées aux points de ses nappes focales ( $x$ ) et ( $\bar{x}$ ). Si  $\Phi$  et  $\bar{\Phi}$  chacune a deux points caractéristiques, les seconds points caractéristiques ( $y$ ) et ( $\bar{y}$ ) engendrent deux nappes focales d'une autre congruence  $W$ . S'il y en a trois ( $x$ ), ( $y_1$ ), ( $y_2$ ) et ( $\bar{x}$ ), ( $\bar{y}_1$ ), ( $\bar{y}_2$ ) dont deux points ( $y_2$ )  $\equiv$  ( $\bar{y}_2$ )

se confondent, les foyers  $(x)$ ,  $(\bar{x})$  sont les points caractéristiques des quadriques de Lie attachées aux points de  $(y_2)$ . Si les quatre nappes  $(y_i)$  sont projectivement applicables sur  $(x)$ , les surfaces  $(\bar{y}_i)$  sont applicables sur  $(\bar{x})$  et sur  $(x)$ . *S. Finikoff.*

● **Guichard, Cl.:** Théorie générale des réseaux, applications. Mém. Sci. math. Fasc. 77, 75 pag. (1936).

Le fascicule référé est une continuation du fascicule précédent qui porte le même titre (ce Zbl. 12, 371) et contient l'examen des propriétés particulières des réseaux et des congruences dans l'espace de deux jusqu'à six dimensions. Pour chaque espace l'auteur examine la loi d'orthogonalité des éléments et en déduit une classification détaillée des réseaux et congruences  $O$  (= orthogonal),  $N$  (= nul) etc. conjugués et harmoniques. Comme le réseau  $N$  n'existe qu'à partir d'un espace d'ordre 6, il considère dans  $E_3$  le réseau  $C \equiv 4N$  (= la projection sur  $E_3$  d'un réseau  $N$  de l'espace  $E_{3+4-1}$ ) qui est harmonique à une congruence  $O$  et est applicable sur un autre réseau de  $E_3$ ; dans  $E_4$  le réseau  $L \equiv 3N$  dont la congruence conjuguée est  $K \equiv 5J$  et congruence harmonique  $I$  et qui est orthogonal à un réseau  $O$ ; dans  $E_5$  le réseau  $I \equiv 2N$  dont la congruence conjuguée est  $O$  et harmonique  $I, 2I$  et qui est orthogonal à une congruence  $I$ . La seconde partie du fascicule contient l'application à la théorie des congruences de cercles et de sphères et à la théorie des surfaces. L'auteur considère les réseaux isothermiques, les réseaux  $W$  (= les lignes de courbure d'une surface  $W$ ), les réseaux conjugués persistants dans une déformation (= les réseaux  $C$  dans  $E_3$ ), les surfaces à courbure constante négative et les congruences de sphères de courbure principales d'une surface. *S. Finikoff* (Moscou).

**Thomas, T. Y.:** On the metric representations of affinely connected spaces. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 77—78 (1936).

In Ergänzung der Ergebnisse einer früheren Arbeit über denselben Gegenstand (dies. Zbl. 12, 374; vgl. insbesondere den letzten Satz des Referates) wird gezeigt, daß die Gesamtheit der Übertragungen, die eine metrische Darstellung von der Dimension  $r$  gestatten, sich nicht durch Gleichungen  $F_1 = 0$  und Ungleichungen  $F_2 \neq 0$  charakterisieren läßt. *van der Waerden* (Leipzig).

**Pantazi, Alexandre:** Sur les couples transformables. Ann. Roum. Math. cahier 2, 3—34 (1935).

L'auteur donne le calcul détaillé dont il a énoncé les résultats dans une Note récente (ce Zbl. 9, 84). Il applique la méthode du tétraèdre-mobile de M. Cartan et sa théorie des équations de Pfaff en involution. *S. Finikoff* (Moscou).

**Inzinger, Rudolf:** Zur Differentialgeometrie Pfaffscher Mannigfaltigkeiten. Anz. Akad. Wiss., Wien 1936, 9—12 (Nr 2).

Diese vorläufige Mitteilung enthält eine Skizze der Herleitung der wichtigsten Resultate der Differentialgeometrie Pfaffscher Mannigfaltigkeiten, die in den letzten Jahren besonders von D. Sintzov entwickelt wurde (vgl. dies. Zbl. 4, 418). Den Ausgangspunkt bildet die Betrachtung einer einparametrischen Schar von Integralstreifen einer Pfaffschen Mannigfaltigkeit  $P dx + Q dy + R dz = 0$ , der drei Einheitsvektorenfelder  $\xi_1(x, y, z)$ ,  $\xi_2(x, y, z)$ ,  $\xi_3(x, y, z)$  von Tangentenvektoren, Tangentialnormalenvektoren und Normalenvektoren zugeordnet werden, ferner die Herleitung der Formeln für die geodätische Krümmung, die Normalkrümmung und die geodätische Torsion dieser Streifen. Als Beispiel für die in der Mitteilung angeführten Formeln sei die folgende erwähnt:  $\xi_1 \text{rot} \xi_1 = \xi_2 \text{rot} \xi_2$ , welche die Felder der Tangentenvektoren  $\xi_1$  und  $\xi_2$  der Krümmungslinien I. Art charakterisiert. *O. Borůvka* (Brno).

● **Vranceanu, G.:** Les espaces non holonomes et leurs applications mécaniques. Mém. Sci. math. Fasc. 76, 70 pag. (1936).

Following the method of congruences (or, equivalently, Pfaffian forms) and groups of transformations associated with them, the author undertakes an exposition of the most important results in the theory of non-holonomic spaces. Chap. I deals with the absolute differential calculus of congruences, for the most part without reference to metric or affine connection. Two types of tensor character are considered: (1) with respect to point transformation of coordinates, and (2) with respect to linear transformation of congruences. Chap. II deals with affine connections induced by two Pfaffian systems defining complementary non-holonomic spaces  $X_n^m$ ,  $X_n^{n-m}$  in  $X_n$  (Vranceanu, this Zbl. 6, 419). Metrical non-holonomic spaces arise from the imposition of conditions of orthogonality on the transformations conserving  $X_n^m$ . Chap. III is devoted to the properties of metrical non-holonomic spaces, including a second fundamental form, interior parallelism, curvature tensors,

autoparallels and curves of stationary length, rigid connections. Chap. IV deals with non-holonomic spaces with affine connection. Chap. V deals with non-holonomic dynamical systems. The author considers a system in which the parametric lines of one coordinate  $x^1$  satisfy the constraints and the potential energy and the contravariant and covariant components of the fundamental congruences depend on  $x^1$  only: he gives a proof that the integration of the equations of motion reduces to the integration of a system of linear equations and to quadratures. (This proof is not clear to the reviewer: it appears necessary to assume further that the parametric lines of  $x^1$  are orthogonal trajectories of  $x^1 = \text{const.}$ ) There is also a discussion of linear first integrals, equations of trajectories (elimination of  $t$ ), trigonometric stability, rheonomic systems and generalised integral of energy. — There are a number of minor misprints: the second equation in (2'') should read  $\lambda_a^i = c_a^b \lambda_b^i$ . The system of numbering the equations appears confusing to the reviewer. *J. L. Synge.*

### Topologie:

**Lijn, G. van der:** Un théorème topologique sur les champs de surfaces. *Mathesis* 50, 21—24 (1936).

Eine Zerlegung des dreidimensionalen Elementes  $E^3$  in ein System  $F$  von Flächen  $S$ , deren jede einer Kreisscheibe homöomorph ist, und derart, daß: 1. durch jeden Punkt  $P$  von  $E^3$  eine und nur eine Fläche  $S(P)$  durchgeht, 2. der Rand jeder Fläche  $S$  auf dem Rande  $S^2$  des Elementes  $E^3$  liegt, ist stetig. Notwendigkeit der zweiten Bedingung wird durch ein Beispiel gezeigt. Anwendung auf Differentialgleichungen: Ist  $dz = X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy$  eine solche Gleichung, daß durch jeden Punkt eines elementaren Bereiches eine und nur eine Integralfläche der Gleichung durchgeht, die bis auf die Grenze fortgesetzt werden kann, dann sind die Funktionen  $X(x, y, z)$  und  $Y(x, y, z)$  höchstens von der I. Klasse (Baire) im Innern des betrachteten Bereiches.

*Julia Róžańska* (Moskau).

**Whyburn, G. T.:** On the structure of continua. *Bull. Amer. Math. Soc.* 42, 49 bis 73 (1936).

Ein sehr klarer Bericht über die Hauptergebnisse der Theorie der Zerschneidungspunkte (cut points), der zyklischen Elemente nullter und höherer Ordnung, der Zerlegungspunkte (separating points) im großen und kleinen und das Problem, Bedingungen anzugeben dafür, daß ein eindeutiges stetiges Bild  $B$  eines Kontinuums  $A$  zu  $A$  homöomorph ist.

*Nöbeling* (Erlangen).

**Gehman, H. M.:** On extending a homeomorphism between two subsets of spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* 42, 79—81 (1936).

Notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein Homöomorphismus zwischen zwei echten abgeschlossenen stetigen Untermengen  $M$  und  $M'$  von zwei Sphären  $S^2$  und  $S^{2'}$  zu einem Homöomorphismus zwischen den beiden Sphären erweitert werden kann. Beinahe dieselben Bedingungen wie bei Adkisson (dies. Zbl. 11, 38). Vgl. auch Gehman [Amer. Trans. 28, 252—265 (1926)].

*Julia Róžańska* (Moskau).

**Mazurkiewicz, Stefan:** Über die Zerlegung kompakter Räume in zweipunktige Mengen. *Fundam. Math.* 26, 50—51 (1936).

Sei  $R$  ein kompakter metrischer Raum,  $2^R$  der Raum der abgeschlossenen Teilmengen von  $R$ . Verf. beweist die Existenz einer abgeschlossenen nulldimensionalen Teilmenge  $H$  von  $2^R$  derart, daß jedes Element  $U$  von  $H$  eine zweipunktige Menge von  $R$  und die Summe aller  $U$  gleich  $R$  ist. (Vgl. die Arbeit des Verf. *Fundam. Math.* 23, 11; dies. Zbl. 9, 413.)

*Nöbeling* (Erlangen).

**Zippin, Leo:** On a problem of Čech. *Čas. mat. fys.* 65, 49—51 (1936).

Čech hat die folgende Definition einer Art vom lokalen Zusammenhang eingeführt: Ein Raum heißt „lokal-zusammenhängend“, wenn jede seiner offenen endlichen Überdeckungen eine endliche aus zusammenhängenden Mengen bestehende Überdeckung enthält. Čech stellte die Frage: Ist jeder in seinem Sinne lokal-zusammenhängende Raum notwendig bikompakt? Verf. löst diese Frage im negativen Sinne, und zwar dadurch, daß er folgende an und für sich interessante Sätze beweist: Jeder im Čechschen Sinne lokal-zusammenhängende reguläre Raum ist auch schlechthin lokal-

zusammenhängend; jeder kompakte Hausdorffsche Raum, der im üblichen Sinne lokal zusammenhängend ist, ist es auch im Sinne von Čech. Hieraus folgt, daß jeder lokal zusammenhängende kompakte, aber nicht bikompakte reguläre Raum (z. B. die nicht-Archimedische Gerade, die man erhält, wenn man für jede Ordnungszahl  $\alpha$  der 2. Cantorschen Zahlklasse zwischen  $\alpha$  und  $\alpha + 1$  eine offene Strecke einschaltet) als Beispiel für die negative Lösung der Čechschen Frage gilt. *P. Alexandroff* (Moskau).

**Threlfall, W.: La notion de recouvrement.** Enseignement Math. **34**, 228—254 (1935).

Exposé très clair et très exact quoique succinct de la notion topologique de recouvrement et de diverses notions qui s'y rattachent. Les définitions fondamentales de la théorie des surfaces de Riemann, de la théorie des formes spatiales et de celle des groupes continus sont données en détail; plusieurs théorèmes se rapportant à ces théories sont énoncés et leurs démonstrations sont rendues intuitives même si elles ne sont pas complètement développées. Le matériel très étendu traité par l'auteur sur peu de pages est illustré par plusieurs exemples fort instructifs. *P. Alexandroff*.

**Freudenthal, H., and W. Hurewicz: Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien.** Fundam. Math. **26**, 120—122 (1936).

Eine Abbildung einer Punktmenge  $M$  eines metrischen Raumes  $X$  in  $X$  heißt eine Dehnung bzw. Verkürzung bzw. Isometrie, wenn  $\varrho(f(x), f(x')) \geq$  bzw.  $=$  bzw.  $\leq \varrho(x, x')$  für je zwei Punkte  $x$  und  $x'$  von  $X$  ist. Verff. beweisen folgenden Satz: Ist  $X$  total beschränkt,  $f$  eine Dehnung bzw. eine Verkürzung und  $M$  überall dicht rel  $f(M)$  bzw.  $f(M)$  überall dicht rel  $M$ , so ist  $f$  eine Isometrie, und in der obigen Dichtigkeitsbeziehung lassen sich  $M$  und  $f(M)$  umtauschen. Dabei heißt allgemein  $A$  überall dicht rel  $B$ , wenn  $\bar{A} \supset B$  ist. Aus diesem Satz wird weiter gefolgert: Jede Dehnung  $f$  eines Kompaktums  $X$  in sich ist eine Isometrie, und es ist  $f(X) = X$ . Desgleichen gilt von jeder Verkürzung des Kompaktums  $X$  auf einen umfassenden  $X'$ . Ferner: Ein Kompaktum läßt sich nicht isometrisch auf einen echten Teil abbilden. Ist von zwei Kompakten der eine einem Teil des anderen isometrisch, so sind sie isometrisch. *P. Alexandroff*.

**Hurewicz, W.: Beiträge zur Topologie der Deformationen. IV. Asphärische Räume.** Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **39**, 215—224 (1936).

Ein stetig zusammenhängender Raum  $Y$  heißt asphärisch, wenn in  $Y$  jedes stetige Bild der  $m$ -Sphäre ( $m = 2, 3, \dots$ ) auf einem Punkt zusammenziehbar ist. Beispiele asphärischer Räume sind alle offenen und geschlossenen Flächen mit Ausnahme von Kugel und projektiver Ebene, ferner jede  $n$ -dimensionale euklidische oder hyperbolische Raumform, insbesondere das topologische Produkt aus  $n$  Kreisen; allgemeiner ist das topologische Produkt aus endlich vielen asphärischen Räumen selbst asphärisch. Die Bedeutung der asphärischen Räume beruht auf dem folgenden Abbildungssatz: Ist  $X$  ein endliches Polyeder und  $Y$  ein asphärischer Raum, so gehört zu jeder Homomorphismenklasse der Fundamentalgruppe von  $X$  in die Fundamentalgruppe von  $Y$  genau eine Abbildungsklasse von  $X$  in  $Y$ . Dieser Satz, der von Polyedern auf endlichdimensionale Peanosche Kontinua übertragen wird, gestattet verschiedene Anwendungen, von denen nur die folgenden erwähnt seien: Die Homologiegruppen eines endlichdimensionalen regulär asphärischen Kontinuums sind durch seine Fundamentalgruppe bestimmt. — Für die Bettischen Zahlen  $p_i$  einer topologischen Gruppe  $G$  gelten die Ungleichungen:  $p_i \geq \binom{p_1}{i}$ , woraus für  $i = p_1$  die Ungleichung  $p_1 \leq \dim G$  von Smith hervorgeht. (III. vgl. dies. Zbl. **13**, 229.) *Seifert* (Heidelberg).

**Tucker, A. W.: Cell spaces.** Ann. of Math., II. s. **37**, 92—100 (1936).

Die Arbeit ist eine Weiterführung und Verschärfung der Begriffsbildungen, die sich in der Dissertation des Verf., „An abstract approach to manifolds“ [Ann. of Math. **34**, 191—243 (1933); dies. Zbl. **6**, 423], befinden. Er gelangt auf diese Weise zum allgemeinen Begriff eines diskreten oder Zellenraumes, einem Begriff, der in den letzten Jahren ungefähr gleichzeitig unter verschiedenen Gesichtspunkten und Bezeichnungen von verschiedenen Autoren eingeführt worden ist (Tucker, Garrett

Birkhoff, Alexandroff u. a.). Da sich die Definitionen des Verf. mit den bereits hier besprochenen Definitionen des Ref. inhaltlich decken [Alexandroff, C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 1649—1651 (1935); dies. Zbl. **11**, 326], darf auf ihre Wiedergabe verzichtet werden. Nach einer elementaren Theorie der Zellenräume, die insbesondere ihre Beziehungen zu den topologischen Räumen einerseits und zu den Komplexen andererseits enthält sowie den Dimensionsbegriff, führt der Verf. im Anschluß an seine schon erwähnte Dissertation den Begriff der Orientierung der Zellen eines allgemeinen Zellenraumes ein. Dieser Übergang zu den orientierten Zellenräumen geschieht dadurch, daß zu jedem Paar inzidenter Zellen  $x^r$ ,  $x^{r-1}$  (der obere Index gibt die Dimensionszahl an) eine Zahl — die Inzidenzzahl — eingeführt wird. Nachdem auf axiomatischem Wege inhaltlich verlangt wird, daß der Rand einer Zelle ein Zyklus (d. h. ein algebraischer Komplex mit verschwindendem Rande) ist, kann zum Aufbau der kombinatorischen Topologie (wie in Verf.s Dissertation) übergegangen werden.  
*P. Alexandroff (Moskau).*

## Mechanik.

**Williamson, John:** On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems. Amer. J. Math. **58**, 141—163 (1936).

This paper concerns the problem of obtaining a canonical form for the system of  $2m$  differential equations,  $B\dot{x} = Ax$ , where  $B$  is the skew symmetric matrix  $\begin{pmatrix} O & -E \\ E & O \end{pmatrix}$ ,  $E$  the unit matrix of order  $m$ , and  $A$  is a symmetric matrix of constants. Using a result of Wintner (this Zbl. **9**, 379) the problem is shown to be equivalent to the algebraic problem of the simultaneous reduction of the matrices  $A$  and  $B$ ,  $A \rightarrow P^*AP$ ,  $B \rightarrow P^*BP$ ,  $P$  non singular. The author first considers the more general problem where  $B$  is assumed to be only skew symmetric and non-singular, and the elements of  $A$  and  $B$  lie in a commutative field  $K$ . A reduction to diagonal block matrices is effected, the component blocks being displayed. The elementary factors (powers of the distinct irreducible factors of the invariant factors) of the matrix  $A - \lambda B$  play a fundamental rôle in the determination of the canonical form, but it is not uniquely determined by them. These results, applied to the case where  $B$  assumes the original form, yield a simple form for the differential equations. The totality of the possible canonical forms are displayed in the special case  $m = 2$  and  $K$  is the field of real numbers. *G. A. Hedlund.*

**Comenetz, George:** Curvature trajectories. Amer. J. Math. **58**, 225—235 (1936).

This paper completes in certain respects the derivation of the interrelations and properties of  $D$ - (dynamical),  $C$ - (curvature) and  $S$ - (sectional) families of plane curves, definitions and properties of which have been given by Kasner. (For definitions of the first two see this Zbl. **9**, 326; the last is a family obtained by projection from the plane sections of a surface in 3-space.) It is shown that if an  $S$ -family is also a  $C$ -family, it is derived from a cone or quadric surface. The possible types of conics which may constitute a  $C$ -family are determined. The methods are straightforward and considerable use is made of the work of Kasner. *G. A. Hedlund (Bryn Mawr).*

**Hilmy, Heinrich:** Sur la structure d'ensemble des mouvements stables au sens de Poisson. Ann. of Math., II. s. **37**, 43—45 (1936).

A proof that those motions of a dynamical system which are stable in the sense of Poisson and belong to a closed set of complete motions form a point set which is the product of a denumerable set of open sets. This has been essentially remarked by Carathéodory, Über den Wiederkehrsatz von Poincaré; S.-B. preuß. Akad. Wiss. **1919**, 581.

*G. A. Hedlund (Bryn Mawr).*  
**Niemytzki, V.:** Über vollständig unstabile dynamische Systeme. Ann. Mat. pura appl., IV. s. **14**, 275—286 (1936).

This paper contains the proofs of results previously outlined (see this Zbl. **9**, 379). In the previous review, the word "funnel" should be replaced by saddlepoint. *Hedlund.*

**Tallqvist, Hj.:** Anwendung der elliptischen Funktionen auf die gezwungene Bewegung eines Punktes in einer Ebene unter dem Einfluß einer Zentralkraft. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. 8, Nr 24, 1—58 (1936).

The author considers the motion of a point which is constrained to move in a plane under the influence of a force directed to or from a centre outside the plane, and discusses the cases which can be solved on terms of elliptic functions. Denoting by  $P$  the force and by  $r$  the distance from the centre, the cases considered are

$$P = \pm mk^2, \quad \pm \frac{mk^2}{r^2}, \quad -\frac{mk^2}{r^3}, \quad -mk^2r + \frac{mc^2}{r^3}$$

and finally the motion of a point in a uniformly rotating plane. *Whittaker.*

**Zamorev, A. A.:** Sur le mouvement de deux corps dans un milieu résistant. Russ. astron. J. 13, 84—91 u. franz. Zusammenfassung 91 (1936) [Russisch].

Verf. untersucht qualitativ das Zweikörperproblem bei Anwesenheit von den Geschwindigkeiten proportionaler Reibungskräfte. Es wird gezeigt, daß die Bewegung in einem begrenzten Raumgebiet verläuft und daß immer Zusammenstöße in endlicher oder unendlicher Zeit stattfinden; im Falle gleicher Massen wird gezeigt, daß die Bahnkurven Spiralen sind (eine Ausnahme bildet der Fall geradlinigen Zusammenstoßes).

*A. Andronoff, A. Witt (Moskau).*

**Rein, Natalie:** Sur quelques propriétés des surfaces de la vitesse relative zéro dans le problème restreint circulaire des trois corps dans un milieu gravitant. Russ. astron. J. 13, 45—73 u. franz. Zusammenfassung 73—77 (1936) [Russisch].

Verf. untersucht das restringierte Dreikörperproblem; zum Unterschied von Hill wird einer der beiden Gravitationskerne  $S$ , die kreisförmige Bewegungen ausführen, mit einem verteilten zentralsymmetrischen (in bezug auf  $S$ ) gravitierenden Medium verbunden; in diesem Falle bekommt das Jacobische Integral die Gestalt  $x^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2(U - C)$ ; hier bedeuten  $x, y, z$  ( $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ) Koordinaten eines rotierenden Bezugssystems mit Nullpunkt in  $S$  [Drehgeschwindigkeit = Winkelgeschwindigkeit der beiden großen Massen =  $\frac{\sqrt{M(R) + \mu}}{R^{3/2}}$ ;  $R$  = Entfernung der beiden großen Massen;  $M(r)$  = Masse des verteilten Mediums innerhalb der Kugel vom Halbmesser  $r$  + Masse des Gravitationskernes  $S$ ;  $\mu$  = Masse des zweiten freien Gravitationskernes]

$$U = -\int \frac{M(r)}{r^2} dr + \frac{\mu}{r} + \frac{M(R) + \mu}{2R^3}(x^2 + y^2) - \frac{\mu}{R^2}x; \varrho^2 = (x - R)^2 + y^2 + z^2; C = \text{konst.}$$

Verf. untersucht qualitativ die Flächen verschwindender Relativgeschwindigkeit  $U(x, y, z) = C$ .

*A. Andronoff, A. Witt (Moskau).*

**Maruhn, Karl:** Über eine Klasse ebener Wirbelbewegungen in einer ideellen inkompressiblen Flüssigkeit. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 45, 194—201 (1935).

The well known analogy between the logarithmic potential and the Lagrangian stream function is utilized in establishing a correspondence between two-dimensional equilibrium figures of rotating liquids and certain vortex fluid motions, which are permanent with respect to axes rotating with an angular velocity equal to the square of the angular velocity of the equilibrium figure.

*D. C. Lewis.*

**Putnis, A.:** Le potentiel newtonien à l'extérieur d'un astre ellipsoïdal en rotation permanente. Comment. math. helv. 8, 181—185 (1935).

The development of the Newtonian potential function of the star is given in spherical harmonics. The star is assumed to be a flattened ellipsoid of revolution. The angular velocity of the free surface (which is a function of the latitude) is supposed symmetric with respect to the equator.

*D. C. Lewis (Ithaca, N.Y., U.S.A.).*

## Astronomie und Astrophysik.

**Iljinsky, J.:** Über die Vorausberechnung der totalen Sonnenfinsternisse. Astron. Nachr. 259, 97—100 (1936).

● **Handbuch der Astrophysik.** Hrsg. v. G. Eberhard, A. Kohlschütter und H. Ludendorff. Bd. 7. Erg.-Bd. Berücksichtigend die Literatur bis Ende 1934 nebst einem Generalregister des Gesamtwerkes. Berlin: Julius Springer 1936. IX, 755 S. u. 110 Abb. RM. 126.—.

**Strömgen, Bengt: Thermodynamik der Sterne und Pulsationstheorie.** S. 121 bis 202 u. 15 Abb.

Die Literatur seit Erscheinen des 3. Bandes (1930) wird referiert. Der Überblick lehrt, daß der wichtigste neue Gedanke der letzten Jahre die Übernahme der Theorie der Gasentartung von seiten der Quantentheorie war. Die Zustandsgleichungen und ihre Gültigkeitsbereiche werden ausführlich wiedergegeben. Es folgt die Erweiterung des Standardmodells ( $\epsilon = \text{constans}$ ,  $\kappa = \text{constans}$ ) durch Milne 1931 unter Berücksichtigung der notwendigen Abänderungen der Zustandsgleichung im entarteten Sterninnern. Sehr ausführlich ist die Theorie der weißen Zwerge behandelt; da das Gebiet noch ganz neu ist, liegt hier ein in sich geschlossener, vollständiger Bericht vor. — Leider ist die Atomphysik bisher nicht in der Lage gewesen, einen wesentlichen Fortschritt im vielleicht brennendsten Problem des Sternaufbaus hervorzubringen, in der Frage der Energiequellen. Einige eingehendere Studien über die von Atkinson und Houtermans vorgeschlagene Einfangung von Protonen bilden hier den einzigen Fortschritt, der aber die wesentliche Schwierigkeit der Theorie, den Aufbau schwerer Kerne bei Eddingtonschen Temperaturen, auch noch nicht zu erklären vermag. Da zum mindesten für die Riesensterne sehr hohe Mittelpunktstemperaturen ( $10^9$  Grad) wohl endgültig ausschneiden, sieht man auch nicht recht, wie man das gewaltige experimentelle Material über Kernprozesse, das sich in den letzten Jahren angehäuft hat, für die Erklärung der Energiequellen nutzbar machen soll. — In der Frage des Energietransports im Sterninnern ist eine endgültige Klärung des Absorptionsvermögens der Sternmaterie noch nicht erfolgt; dagegen sind einige neue Mechanismen vorgeschlagen, von denen Verf. die Wärmeleitung durch Konvektion ausführlich bespricht. — Der Abschnitt über pulsierende Sterne bringt eine unmittelbare Fortführung der im 3. Bande von Milne gegebenen Darstellung der Sternhydrodynamik und Stabilitätsfragen. S. Flüge (Leipzig).

**Schwarzschild, Martin: Zur Pulsationstheorie der  $\delta$  Cephei-Sterne.** Z. Astrophys. 11, 152—180 (1935).

Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag zur Klärung der Schwierigkeiten, die sich bei dem Vergleich der Eddingtonschen Pulsationstheorie der Cepheiden mit der Erfahrung ergeben haben. Der von Baade diskutierte Widerspruch zwischen der aus der Radialgeschwindigkeitskurve abgeleiteten Kurve des Sterndurchmessers und der aus Temperaturen und Helligkeiten abgeleiteten entsprechenden Kurve wird darauf zurückgeführt, daß die Cepheiden keine schwarzen Strahler sind. Durch Berücksichtigung der Abweichung von der schwarzen Strahlung nach Unsöld wird eine wesentlich bessere Übereinstimmung erzielt. Der viel diskutierte Widerspruch in bezug auf die Phasenbeziehung zwischen Lichtkurve und Radialgeschwindigkeitskurve wird durch Untersuchung der Wirkung der Abweichungen der Pulsationen von der in der Eddingtonschen Theorie vorausgesetzten Adiabasie beleuchtet. Durch numerische und analytische Untersuchungen zweier Modelle, in denen die in dem äußersten Teile des Sterns auftretenden starken Abweichungen von der Adiabasie berücksichtigt werden, findet Verf. eine erhebliche Änderung der Phase der Ausstrahlung gegenüber dem Fall rein adiabatischer Pulsationen. Verf. untersucht auch die Wirkungen der sehr kleinen Abweichungen von der Adiabasie im Sterninnern auf die Pulsationen. Indem diese allerdings von vornherein als von ungedämpft konstanter Amplitude angesetzt werden, wird ein sehr erheblicher Einfluß der erwähnten Abweichungen gefunden. Zum Schluß werden die in der Pulsationstheorie auftretenden Randbedingungen im Sternmittelpunkt diskutiert. Bengt Strömgen (Kopenhagen).

**Severny, A. B.: On stellar configurations with core possessing a high density of energy.** Monthly Not. Roy. Astron. Soc. 96, 219—230 (1936).

The author treats the problem of equilibrium of a mixed stellar model consisting of a high temperature and high density degenerate gas core surrounded by an envelope of perfect gas. Within the core energy is liberated at high rate. The equation of state for the core is found to have approximately the form:  $p = K_3 \rho$ , where  $p$  is the pressure,  $\rho$  = the density and  $K_3$  = a coefficient almost independent of the temperature. Quali-

tative results are derived as to the mass, effective temperature and size of the star which suggest a division of the stars into diffuse and massive giants, ordinary dwarfs and white dwarfs.

*Kyryll Ogrodnikoff (Poulkovo).*

**Rein, Natalie:** Sur les condensations dans une nébuleuse pulvisculaire. III. Sur la stabilité de la condensation sphérique et homogène. Russ. astron. J. 13, 122—153 u. franz. Zusammenfassung 154—155 (1936) [Russisch].

## Relativitätstheorie.

● **Bothezat, George de:** Back to Newton. A challenge to Einstein's theory of relativity. New York, London, Leipzig u. Paris: G. E. Stechert & Co. 1936. VII, 152 pag. a. 4 fig. § 2.50.

**Esclangon, Ernest:** Sur la solution anormale d'un problème de mécanique déduite du principe de relativité. C. R. Acad. Sci., Paris 202, 885—889 (1936).

The author maintains that his proof that the Lorentz transformation can be established on the sole basis of the "principle of reciprocity" (i.e. that natural events run identical courses in isotropic reference-systems having uniform relative velocity) is to be preferred to that of Le Roy because the latter implicitly assumes the existence of an invariant velocity (see Esclangon and Le Roy, this Zbl. 13, 233). He then gives an argument designed to show that the principle of reciprocity leads to a result in conflict with the assumed isotropy of the reference-systems. This he regards as a serious difficulty in the restricted theory of relativity. *H. S. Ruse (Edinburgh).*

**Reichenbächer, Ernst:** Ein Abänderungsvorschlag für das Ausdehnungsgesetz des Weltalls. Z. Astrophys. 11, 192—200 (1936).

**Krat, W.:** Note on the expansion of the universe. Astron. Nachr. 258, 345—350 (1936).

**Tavani, F.:** Light and gravitation. Philos. Mag., VII. s. 21, 564—572 (1936).

**Ghosh, J.:** Die Fundamentalgleichung der allgemeinen Relativitätstheorie. Z. Physik 99, 583—584 (1936).

The gravitational equations of general relativity are

$$G_{pq} - \frac{1}{2} g_{pq} (G - 2\lambda) = -8\pi T_{pq}. \quad (1)$$

The author has shown (this Zbl. 7, 330; 11, 137) that in three fundamental cases the equations

$$G_{pq} - \frac{1}{4} g_{pq} G = -8\pi T_{pq} \quad (2)$$

have the same solutions as (1), the cosmological constant  $\lambda$  appearing as a constant of integration. He now notes that the modified equations (2) cannot be generally valid because the left-hand side of (2) is not solenoidal, and remarks that this difficulty can be overcome by taking the equations in the form

$$G_{pq} - \frac{1}{4} g_{pq} G = -8\pi (T_{pq} - \frac{1}{4} g_{pq} T),$$

these being deducible from (1). The last equations are to be preferred to (1) because they do not involve the extra hypothesis which led to the insertion of the cosmological term in the usual field-equations. *H. S. Ruse (Edinburgh).*

**Silberstein, Ludwik:** Two-centers solution of the gravitational field equations, and the need for a reformed theory of matter. Physic. Rev., II. s. 49, 268—270 (1936).

Nach Levi-Civita läßt sich die Metrik eines axialsymmetrischen statischen Gravitationsfeldes im materiefreien Raum ( $R_{ik}=0$ ) stets auf die Form bringen  $ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{-2\nu} [e^{2\lambda} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\varphi^2]$  mit

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \nu}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} = 0 \quad (*)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} &= \rho \left[ \left( \frac{\partial \nu}{\partial \rho} \right)^2 - \left( \frac{\partial \nu}{\partial z} \right)^2 \right], \\ \frac{\partial \lambda}{\partial z} &= 2\rho \frac{\partial \nu}{\partial \rho} \frac{\partial \nu}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (**)$$

Die Integrabilitätsbedingung von (\*) ist infolge von (\*) identisch erfüllt.  $\lambda$  kann durch Quadraturen erhalten werden, wenn man irgendeine Lösung  $v = v(\varrho, z)$  von (\*) vorgibt. Verf. nimmt  $v = -L_1/r_1 - L_2/r_2$  mit  $r_1^2 = \varrho^2 + (z+a)^2$ ;  $r_2^2 = \varrho^2 + (z-a)^2$  ( $L_1, L_2, a$  Konstante); er erhält

$$\lambda = -\frac{\varrho^2}{2} \left( \frac{L_1^2}{r_1^4} + \frac{L_2^2}{r_2^4} \right) + \frac{2L_1L_2}{D} \left[ \left( 1 - \frac{D^2\varrho^2}{r_1^2r_2^2} \right)^{1/2} - 1 \right]; \quad D = 2a.$$

[Vermutlich muß im zweiten Term im Nenner  $D^2$  stehen, da sonst  $\lambda$  keine reine Zahl ist. Ref.] Verf. zieht in der Meinung, daß die so konstruierte Lösung außer in den Punkten  $r_1 = 0, r_2 = 0$  regulär sei, den Schluß, die Auffassung der Allg. Rel.Th. — Singularitäten des materiefreien Feldes seien der Sitz der felderregenden Massen — bestehe zu Unrecht, da die angegebene Lösung sonst zwei in konstantem Abstand verharrenden Massen entspräche, die in der Natur nicht realisiert sind; er fordert, daß die Feldtheorie gravitierender Materie abgeändert werden müsse. *Heckmann* (Göttingen).

**Einstein, A., and N. Rosen: Two-body problem in general relativity theory.** *Physic. Rev.*, II. s. 49, 404—405 (1936).

Die Verff. weisen erstens die im vorsteh. Referat wiedergegebene Interpretation der Silbersteinschen Lösung zurück. Zweitens zeigen sie, daß die Lösung selbst in zweierlei Hinsicht inkorrekt ist, da sie a) Unstetigkeiten in den Ableitungen habe, wenn man mit Silberstein annimmt, daß die Wurzel im Ausdruck für  $\lambda$  positiv sei, b) nicht die notwendige Bedingung  $\lambda \rightarrow 0$ , wenn  $\varrho \rightarrow 0$ , erfülle, wenn man die Rechnung so leitet, daß beide Vorzeichen der Wurzel erlaubt sind. *Heckmann* (Göttingen).

## Thermodynamik und klassische kinetische Theorie der Materie.

● **Laar, J. J. van: Die Thermodynamik einheitlicher Stoffe und binärer Gemische, mit Anwendungen auf verschiedene physikalisch-chemische Probleme.** Groningen u. Batavia: P. Noordhoff N. V. 1936. 379 S. u. 59 Fig. fl. 12.—

Das Buch enthält im wesentlichen eine Zusammenfassung und Ausarbeitung dessen, was Verf. in 3 Jahrzehnten über das im Titel bezeichnete Gebiet veröffentlicht hat. Unter ständiger Anwendung von Abwandlungen der van der Waalsschen Zustandsgleichung und der klassischen Thermodynamik werden homogene und heterogene Ein- und Zweistoffsysteme sowohl theoretisch als auch mit vielen Zahlenbeispielen behandelt.

*H. Ulich* (Aachen).

**Scheil, Erich: Geometrische Theorie der heterogenen Gleichgewichte.** *Z. Elektrochem.* 42, 153—155 (1936).

**Shaw, A. Norman: The derivation of thermodynamical relations for a simple system.** *Philos. Trans. Roy. Soc. London A* 234, 299—328 (1935).

Contains tables of differential-coefficients of thermodynamic quantities entering into the equation of state, thermodynamic relations between these derivatives and applications to special equations of state.

*O. Halpern* (New York).

**Tychonoff, A.: Théorie mathématique du couple thermoélectrique.** *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 4, 177—182 (1935).

Für den Fall des eindimensionalen Problems der Wärmeleitung untersucht Verf. die Beziehung zwischen der Temperatur, welche durch das thermoelektrische Paar registriert wird, und derjenigen, welche vor der Einführung des Thermoelementes im betrachteten Körper vorhanden war. Dabei werden folgende Umstände berücksichtigt: 1. die Wärmeabgabe an das Thermoelement, 2. die Wärmeleitung im Thermoelement, 3. die Joulesche Wärme und 4. der Peltiereffekt.

*V. Fock* (Leningrad).

**Levi-Cases, A.: Sulla dimostrazione cinetica, per i gas, del teorema di Carnot.** *Atti Mem. Accad. Sci. Padova*, N. s. 51, 93—112 (1935).